VITTORIO EM. III

FONDO PIZZOFALCONE

21 E 31

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio XXVI

Palchetto 9

Num.° d' ordine 78

18440

19 D 70

NAZIONALE
B. Prov.
I
1953
NAPOLI
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III

B. Prov.
I
1953

Digitized by Google

TRATTATO

ELEMENTARE

DI ARITMETICA.

408153

TRATTATO
ELEMENTARE
D' ARITMETICA
AD USO DELLA SCUOLA CENTRALE

DELLE QUATTRO NAZIONI,

DEL SIGNOR

S. F. LACROIX.

NUOVA EDIZIONE NAPOLITANA

FATTA

SULLA DICIOTTESIMA EDIZIONE DI PARIGI

DEL 1832.

NAPOLI,

DALLA TIPOGRAFIA DI RAFFAELLO DI NAPOLI

Strada Quercia n.° 7.

1839.

22180.

AVVERTIMENTO

DELL' EDITORE NAPOLITANO.

Al Corso dell' Aritmetica di Lacroix *si è unito in questa nuova Edizione Italiana il* Supplemento *pubblicato dal medesimo celebre autore, e posto in fronte de' suoi* Elementi di Geometria, *perchè mediante questa aggiunta trovassero gli Studiosi raccolte in un solo volume tutte quelle notizie, che servano indispensabilmente a ben comprendere un Corso in ogni parte compiuto di Geometria Elementare.*

Si sono omesse però nel Supplemento, *che si riporta, le citazioni, e le poche osservazioni, che rimandavano il Leggitore agli* Elementi Geometrici *suddivisati. E mancando il* Supplemento *citato delle Operazioni o dei Metodi conducenti ad estrarre le Radici quadrate e cubiche da ogni Numero è stato, come dovevasi, a tal mancanza supplito coll' aggiungere quelli, che dall' istesso Autore sono stati esposti nei suoi* Elementi d' Algebra.

I Metodi precitati d' estrazione delle Radici, che fanno parte di questo Trattato, sonosi fedelmente trascritti dall' Opera sunnominata, salvo quei pochi e leggerissimi cambiamanti, ed aggiunte necessarie per fare un tutto, che avesse ad un tempo regolarità, connessione, e chiarezza.

INDICE.

Nozioni generali sulle diverse specie di grandezze, o quantità. pag. 1
Della numerazione parlata. 2
Mezzo di rappresentare i numeri con delle cifre, ovvero della numerazione scritta. 4
Maniera di pronunziare un numero. 6
Cosa sia un numero astratto, e concerto. 7
Dell' Addizione ivi
Principj, sui quali poggia l' addizione. 9
Della Sottrazione. 10
Principj, sui quali poggia la sottrazione. ivi
Del senso delle parole *resto*, *eccesso*, *differenza*. ivi
Regola generale della sottrazione. 13
Della prova dell' Addizione, e della Sottrazione. 14
Della Moltiplicazione. 15
Origine della moltiplicazione. ivi
Cosa significhino *moltiplicando*, *moltiplicatore*, *prodotto*, *fattori*. 16
Principj, sui quali riposa la moltiplicazione. ivi
Tavola di Pitagora, contenente i prodotti necessarj a conoscersi per moltiplicare un numero per un altro. 17
Formazione di questa Tavola. ivi
Osservazione, dalla quale deducesi che un prodotto di due fattori non cangia qualunque sia l'ordine dei fattori. 18
Regola di moltiplicare un numero di più cifre per un numero d' una sola cifra. 20
Come si moltiplichi un numero, per 10, 100 ec. 22
Regola di moltiplicare per un numero composto d'una cifra significativa seguita da più zeri. 23
Regola generale della moltiplicazione. 24
Come si compendia la moltiplicazione allorchè il moltiplicando, ed il moltiplicatore son terminati da degli zeri. ivi

Della Divisione. 25
Origine della divisione. ivi
Principj, su i quali appoggiasi la divisione. 26
Cosa significhino *dividendo*, *divisore*, *quoziente*. 28
Cosa bisogni fare allorchè il divisore ha più cifre. 29
Regola generale della divisione. 32
Mezzo per compendiare il calcolo. 33
Cosa bisogni fare allorchè il dividendo, ed il divisore son terminati da degli zeri. ivi
La divisione, e la moltiplicazione si servono scambievolmente di riprova. 34
Delle Frazioni ivi
Origine delle frazioni. ivi
Maniera d' enunciare, e di scrivere le frazioni. 36
Cosa significhino *numeratore*, e *denominatore*. 37
Cangiamento che prova una frazione allorchè s'aumenta, o si diminuisce un de' suoi termini. 38
Tavola rappresentante i cangiamenti, che si eseguiscono sopra una frazione moltiplicando, o dividendo un de' suoi termini. 39
Una frazione non cangia di valore allorchè si moltiplicano, o si dividono i suoi due termini per il medesimo numero. 40
Mezzo di semplificare una frazione senza farla cangiar di valore. ivi
Cosa s' intenda per massimo comune divisore di due numeri. 42
Regola generale per trovare il massimo comune divisore di due numeri. 44
Caratteri, dai quali si riconoscono i numeri divisibili per 2, per 5, e per 3. 45
Cosa s' intenda per *numeri primi*. 48
Della somma, e della sottrazione delle frazioni. ivi
Estrazioni degl' interi da una frazione. 49
Riduzione delle frazioni al medesimo denominatore. 50
Un prodotto composto di più fattori non cangia qualunque sia l' ordine nel quale si moltiplicano questi fattori. 51
Somma, e sottrazione degl' interi uniti a delle frazioni. 53
Cosa significhi generalmente la parola *moltiplicare*. 55
Moltiplicazione d' un numero intero per una frazione. 56
Moltiplicazione d' una frazione per una frazione. 57

Delle frazioni di frazioni. 57
Cosa sia la divisione in generale. 58
Divisione d'un numero intero per una frazione. 59
Divisione d'una frazione per una frazione 60
Delle Frazioni decimali. 61
Origine delle frazioni decimali. ivi
Maniera d'enunciare, e di scrivere i decimali. 62
Dell'addizione e sottrazione dei decimali. 64
Cangiamento che si fa variando di posto la virgola. 66
Moltiplicazione d'un numero, che contiene dei decimali, per un numero intero. 67
Moltiplicazione d'un numero decimale per un numero decimale. 68
Divisione d'un numero decimale per un numero intero. 69
Divisione d'un numero decimale per un numero decimale. ivi
Maniera per approssimarsi al quoziente d'una divisione per mezzo dei decimali. 70
Nota sulla maniera di valutare il quoziente d'una divisione in frazioni d'una specie data. 71
Delle frazioni decimali periodiche. 74
Esposizione del nuovo Sistema metrico, ed applicazioni usuali dell' Aritmetica. 76
Nomenclatura delle diverse specie di *Misure*. ivi
Legame delle diverse unità di misure riportate alla misura di lunghezza. 77
Nota sul legame delle nuove misure colle dimensioni della terra. 78
Esempj dei Problemi, che si presentano più frequentemente in Aritmetica. 79
Delle Proporzioni. 83
Problemi, i quali conducono alle proporzioni. ivi
Cosa sia un rapporto, o ragione, e una proporzione. 85
Un rapporto non cangia allorchè si moltiplicano, o si dividono i suoi due termini per un medesimo numero. 86
Maniera d'indicare che vi è proporzione tra quattro numeri. ivi
Mezzo d'assicurarsi se vi è proporzione tra quattro numeri, e conseguenza notabile, che se ne ricava. 87
Permutazioni, che si possano far subire ai termini d'una proporzione senza turbarla. 88
Come si trovi uno dei quattro termini d'una proporzione allorchè gli altri tre sono cogniti. 89

Avvertenza necessaria per mettere i numeri in proporzione. 90
Cosa sia una ragione, o un rapporto inverso. 91
Regola d' interesse. 92
Regola di sconto. ivi
Nota sulle due maniere di prender lo sconto. 93
Cosa sia un rapporto composto. ivi
Regola del Tre composta. 94
Regola di Compagnia. 99
Diversi altri Problemi. 101
Dell' equidifferenza. 102
Proprietà riguardevole dell' equidifferenza. 103
Nota sulle denominazioni di *proporzione geometrica*, e di *proporzione aritmetica.* ivi
Regola d' Alligazione. 104
Del paragone delle diverse misure del medesimo genere. 106
Rapporti delle misure antiche alle misure nuove; metodo per convertire l' une nell' altre. ivi
Maniera di valutare le monete, o le misure d'un paese mediante quelle di più altri, ovvero *regola congiunta.* 111
Del calcolo dei numeri complessi. 113
Cosa siano i numeri complessi, ed i numeri incomplessi. ivi
Della somma de' numeri complessi. 114
Della sottrazione dei numeri complessi. 115
Della prova dell' Addizione, e della sottrazione de' numeri complessi. 117
Della moltiplicazione dei numeri complessi. 118
Conversione di essi in frazioni. ivi
Moltiplicazione d'un numero complesso per un numero incomplesso. 120
Cosa siano le parti aliquote. 122
Nota sulla denominazione di *falso prodotto.* 123
Metodo per il caso ove il solo moltiplicatore è complesso. 125
——— per il caso ove il moltiplicando, ed il moltiplicatore sono amendue complessi. 127
Regola generale. 129
Della divisione de' numeri complessi. 130
Allorchè il dividendo, ed il divisore sono della medesima specie. 131
Allorchè dessi sono di specie differenti, e che il solo divisore è incomplesso. 133

Allorchè il dividendo, ed il divisore sono amendue complessi. 134
Di alcuni mezzi impiegati per abbreviare i calcoli Aritmetici. 136
Metodo per compendiare la moltiplicazione, e la divisione dei numeri grandi. ivi
Metodo per compendiare la moltiplicazione dei numeri, che contengono dei decimali. 138
Decomposizione d'un numero nei suoi fattori. 141
Idea delle frazioni continue. 143
Sull'applicazione dell'Aritmetica alla Banca, e al Commercio. 148
Supplemento al Trattato Elementare d'Aritmetica, *necessario per passare immediatamente da questo trattato* agli Elementi di Geometria. 150
Dell'estrazione delle radici quadrate de'numeri interi. 174
De'numeri i quali non sono quadrati perfetti. 181
Carattere, del quale si conosce che la radice trovata non è troppo piccola. 182
Come si faccia il quadrato di una frazione, e come se riestragga la radice. ivi
I numeri i quali non sono quadrati, non hanno radice nè in numeri interi, nè in numeri frazionarj. 183
Cosa sia un numero *commensurabile*, o *razionale*. 184
Come s'indichi con un'radicale la radice da estrarsi. ivi
Metodo per approssimarsi alle radici. 185
Dell'estrazione della radice cubica de'numeri interi. 188
Dell'estrazione della radice cubica delle frazioni. 193
Metodo per approssimarsi alle radici cubiche de'numeri, i quali non sono cubi perfetti. 195
Paragone delle antiche misure colle nuove Francesi. 197
Caratteri usati per denotare le antiche misure Francesi. ivi
Tavole per la conversione delle misure antiche in misure nuove Francesi e reciprocamente. 200

FINE DELL' INDICE.

SPIEGAZIONE DELLE CIFRE ROMANE.

Uno	I	j
Due	II	ij
Tre	III	iij
Quattro	IV	iv
Cinque	V	v
Sei	VI	vj
Sette	VII	vij
Otto	VIII	viij
Nove	IX	ix
Dieci	X	x
Venti	XX	xx
Trenta	XXX	xxx
Quaranta	XL	xl
Cinquanta	L	l
Sessanta	LX	lx
Settanta	LXX	lxx
Ottanta	LXXX	lxxx
Novanta	XC	xc
Cento	C	c
Dugento	CC	cc
Trecento	CCC	ccc
Quattrocento	CCCC	cccc
Cinquecento	D ovvero IↃ	d
Secento	DC	dc
Settecento	DCC	dcc
Ottocento	DCCC	dccc
Novecento	DCCCC	dcccc
Mille	M ovvero CIↃ	m
Millecento	MC	mc
Milleducento	MCC	mcc
Milletrecento	MCCC	mccc
Millequattrocento	MCCCC	mcccc
Millecinquecento	MD	md

Osservazione — *Qualunque numero posto tra due parentesi indica l'articolo, sul quale appoggiasi quello ov' esso è citato; e fa di mestieri rileggere il primo se non ci rammentiamo il rapporto, che questo può avere con ciò, che contiene il secondo.*

TRATTATO ELEMENTARE

D' ARITMETICA.

DELLA NUMERAZIONE.

1. Il paragone dei diversi oggetti, i quali cadono sotto i nostri sensi, ci ha fatto ben presto conoscere in tutti questi oggetti un attributo (o qualità), mediante il quale possiam concepirli suscettibili d' aumento, e di diminuzione: questo attributo è la *grandezza*. Essa si manifesta in generale sotto due forme differenti, cioè:

Ora come una collezione di più cose simili, o di più parti separate; s'indica allora con la parola *numero*:

Ora come un sol tutto, senza distinzione di parti; ed è in questa maniera che si concepisce la distanza tra due punti, o sivvero la lunghezza della linea, che va dall' uno all' altro di questi punti; i contorni, oppure gl' inviluppi, i quali determinano la figura, e l' *estensione* dei corpi; finalmente quest' *estensione* medesima.

Il carattere proprio a questa ultima forma della grandezza è il legame, che si ravvisa tra le sue parti, o la loro *continuità*; laddovecchè nel numero si considera solamente quante parti contiene, circostanza alla quale rapportavasi immediatamente la parola *quantità*, che abbiamo in seguito applicata alla *grandezza* in generale, avverten-

do di chiamar *quantità continua* la grandezza considerata sotto la forma *continua*, per distinguerla dal numero, il quale chiamasi *quantità discreta*, o *discontinua*.

2. Tutto ciò che concerne la *grandezza*, è l'oggetto della scienza chiamata *Matematiche*; i *numeri* sono poi specialmente l'oggetto dell'*Artimetica*.

La grandezza *continua* appartiene alla *Geometria*, la quale si occupa particolarmente delle proprietà, che presentano le forme dei corpi per rapporto all'*estensione*.

3. Il *numero* essendo la collezione di più cose simili, o di più parti distinte, suppone l'esistenza d'una di queste cose, oppure d'una di queste parti, presa per termine di paragone, e che chiamasi allora *unità*.

La maniera più naturale di formar i numeri, è d'unire primieramente un'unità con un'altra, poi un'altra ancora con la riunione delle precedenti; e continuando in questa maniera compongonsi delle collezioni d'unità, che s'esprimono con dei nomi particolari: l'insieme di questi nomi, il quale cangia da un linguaggio ad un altro compone la *numerazione parlata*.

4. Siccome nulla limita la grandezza, alla quale si può portar il numero, poichè è sempre possibile, per quanto grande che sia un numero, d'aggiungervi un'unità di più, si concepisce ch'esistono un'infinità di numeri differenti, e che sarebbe per conseguenza impossibile esprimerli in qualunque linguaggio si fosse con dei nomi isolati, o indipendenti gli uni dagli altri.

Da ciò sono nate le nomenclature, nelle quali si è fatto in modo di procurarsi, con le combinazioni d'un piccol numero di parole assoggettate a delle forme regolari, e perciò facili a ritenersi in memoria, un gran numero d'espressioni distinte.

Quelle, che sono in uso nel linguaggio francese, ricavarsi, all'eccezione d'alcune, dai nomi assegnati ai nove

primi numeri, e dall' altre espressioni, che prendono in seguito le collezioni di *dieci*, di *cento*, e di *mille unità*.

In fatti le unità si contano per

uno, *due*, *tre*, *quattro*, *cinque*, *sei*, *sette*, *otto*, e *nove*;

Le collezioni di dieci unità, ovvero le *diecine* con *dieci*, *venti*, *trenta*, *quaranta*, *cinquanta*, *sessanta*, *settanta*, *ottanta*, *novanta* (*);

Le collezioni di dieci diecine, o sivvero le *centinaja* si contan coi nomi affetti alle unità. Si dice *cento*, *dugento*, *trecento*, ... , *novecento*.

Le collezioni di dieci centinaja, oppur le *migliaja*, si contano tanto coi nomi affetti ai nove primi *numeri*, quanto per diecine, e centinaja; così si dice

mille, *duemila*, ... *novemila*,
diecimila, *ventimila*, ec.
centomila, *dugentomila*, ec.

Le collezioni di dieci centinaja di migliaja ovver di mille volte mille portano il nome di *milioni*, e si contano come le migliaja.

Le collezioni delle decine di centinaja di milioni, oppur di mille milioni, si chiama *bilioni* e si contano come i milioni (**).

Ciascuna delle collezioni precedentemente accennate è con-

(*) Per rendere regolare questa parte di *nomenclatura*, bisognerebbe, come lo ha proposto *Condorcet*, sostituir le parole *uniante* e *duante* alle parole *dieci* e *venti*, e sostituire, così come usasi ancora in molte parti della Francia, alle denominazioni composte, *soixante* et *dix*, *quatre-vingt*, et, *quatre vingt-dix* le parole *septante*, *octante*, e *nonante*. È a proposito l' osservare che i primi son l' avanzo d' un' antica maniera di contar per ventine, e dietro la quale dicevasi *six-vingt* per esprimere il numero *centoventi*.

(**) I *bilioni* si chiaman *migliardi* nei calcoli di Finanza.

siderata come formante un'*unità d'un ordine di più in più elevato* a misura che ci allontaniamo di più dalle *unità semplici*. Si vede ancora che i nomi di *diecina*, e di *centinajo* si ripetono sempre, e che non se ne sono introdotti dei nuovi, tali come *migliajo*, *milione bilione*, se non che di quattro in quattr'ordini solamente. Seguendo questa legge, ai *bilioni* si fan succedere i *trilioni*, *quadrilioni*, *quintilioni*, ec., i quali hanno, come i *bilioni*, le loro diecine, e le lor centinaja.

I *numeri* così espressi, allorchè entra più d'una parola nella loro enunciazione, si trovano decomposti in più collezioni, o sivvero in più ordini d'unità indicate quì sopra; per esempio, il numero espresso da *cinque cento mila trecento due* trovasi decomposto in tre parti, le quali sono *cinque centinaje di migliaja*, *tre centinaja d'unità semplici*, *e due di quest' ultime unità*.

La lunghezza dell'espressioni *tutte letterali* dei *numeri* allorchè dessi sono un po' grandi ha fatto immagginar dei caratteri esclusivamente affetti alla loro rappresentazione compendiosa; e da ciò ha avut'origine l'arte di scrivere i numeri col mezzo di questi caratteri, che si chiamano *cifre*, ovvero la *numerazione scritta*.

Quella, ch'è in oggi adottata, procede presso a poco in una maniera analoga alla numerazione parlata. Primieramente i nove primi numeri vi sono rappresentati ciascuno mediante un carattere particolare, cioè,

1	2	3	4	5	6	7	8	9
uno,	*due*,	*tre*,	*quattro*,	*cinque*,	*sei*,	*sette*,	*otto*,	*nove*.

Quando un numero è composto di diecine e d'unità, si scrivono successivamente da sinistra a destra le diecine, e le unità coi caratteri, da cui questi numeri sono rappresentati. Il numero *quarantasette*, per esempio, scrivesi 47: la prima cifra a sinistra 4 indica le quattro diecine, ed ha in conseguenza un valore dieci volte maggior di quello, che avrebbe, se dessa fosse stata sola; mentrecchè la cifra 7 posta alla destra, esprimente le sette unità, non ha che il valore che le è stato sin da principio.

Vedesi nel numero *trentatre*, il quale scrivesi 33, la cifra 3 ripetuta due volte, ma con dei valori diversi : *la prima a sinistra ha un valore dieci volte maggiore di quella, ch' è alla sua destra.*

Quest' è il principio fondamentale della nostra numerazione scritta.

Se vi volesse esprimer *cinquanta*, oppur cinque diecine, siccome non vi sono nessune unità in questo *numero*, altro non dovrebbesi scrivere che la cifra 5, e bisognerebbe in conseguenza indicar con un segno particolare che nell' espressione del numero questa cifra deve occupare il primo posto a sinistra; per questo porremo alla sua destra il carattere o, ovvero lo *zero*, il quale non ha per se stesso alcun valore, e non serve se non a riempire il posto delle collezioni d'unità, le quali mancano nell'enunciazione del numero proposto, e si avrebbe 50.

6. Con dieci caratteri solamente, e con la convenzione stabilita pocanzi sul valore, che le cifre prendono dal posto, che desse occupano, si perviene ad esprimere tutti i numeri possibili.

Con due cifre si possono scrivere i numeri sino a nove diecine e nove unità, il che forma 99, oppur *novantanove*. Dopo di questo *numero* viene il centinajo, il quale s'esprime con la cifra 1 avanzata d'un posto di più verso la sinistra di quel che non lo sarebbe se dessa esprimesse delle diecine, e per questo si pongon due zeri alla suadestra, il che fa 100.

Le unità e le diecine, che aggiungeremo in seguito per formare i numeri superiori a 100, prenderanno il posto, che loro è proprio; così *centuno* si scriverà in cifre 101, *centundici* si scriverà 111. Si vede in questo numero la medesima cifra ripetuta tre volte con differenti valori. Nel primo posto, a contar dalla destra, ella esprime un unità, nel secondo una decina, nel terzo un centinajo. Lo stesso è riguardo ai numeri 222, 333, 444, ec. Così per una conseguenza della convenzione stabilita precedentemente a riguardo delle diecine, e delle unità, *una medesima cifra esprime delle unità di dieci in dieci volte maggiori a misu-*

ra che dessa si avanza dalla destra verso la sinistra, e diviene per un semplice cangiamento di posto capace a rappresentar successivamente le diverse collezioni d' unità, le quali posson entrare nell' espressione d' un numero.

7. Scrivesi dunque un numero sotto la dettatura, o dietro al suo enunciato, ponendo successivamente allato le une dall' altre, principiando dalla sinistra, le cifre le quali esprimono i numeri d' unità di ciascuna collezione; ma bisogna aver presente alla mente l' ordine in cui si succedono queste collezioni, per non ometterne alcuna, e riempire con degli zeri i posti vuoti di quelle che mancano nell' enunciato del numero che dee scriversi. Se questo fosse, per esempio, *trecentoventiquattromilanovecentoquattro*, porrebbesi 3 per le centinaja di migliaja, 2 per le venti migliaja o due decine di migliaja, 4 per le migliaja, 9 per le centinaja; e siccome immediatamente dopo delle centinaja vengono le diecine, le quali mancano nel numero proposto, metterebbesi o per occuparne il luogo, dipoi porrebbesi la cifra 4 delle unità: si avrebbe in tal maniera 324904.

Parimente, coll'avvertenza di riempire per mezzo di zerii posti delle diecine di migliaja, delle migliaja, e delle diecine, le quali mancano nel mumero *cinquecentomilatrecentodue*, scriveremo 500302.

8. Allorchè un numero è scritto in cifre, per enunciarlo, o tradurlo nel linguaggio ordinario, è mestieri sostituire a ciascuna delle cifre la frase, che la medesima rappresenta, e dietro al posto che occupa questa cifra, indicare, o pronunziare la collezione alla quale appartengono le sue unità. Ciò sarà reso chiaro dall' esempio seguente.

2	4,	8	9	7,	3	2	1,	5	8	0,	3	4	6
diecine di trilioni	TRILIONI.	centinaja di bilioni	diecine di bilioni	BILIONI.	centinaja di milioni	diecine di milioni	MILIONI.	centinaja di migliaja	decine di migliaja	MIGLIAJA.	centinaja	diecine	UNITA'

Le cifre di questo numero son divise con delle virgole in gruppi, o *membri*, di tre in tre cominciando dalla destra; ma l'ultimo membro a sinistra, che nell'esempio attuale non ha che due cifre, potrà qualche volta non averne che una sola. Ciascuno di questi membri corrisponde alle collezioni indicate dalle parole *unità*, *migliajo*, *milione*, *bilione*, *trilione*, e le sue cifre n' esprimono successivamente le unità, le diecine, e le centinaja. *Si forma in conseguenza l'espressione tutta in letttere del numero proposto enunciando ciascun membro come se desso fosse solo, ed aggiungendo dopo delle sue unità il nome, che le medesime portano.*

Nell' esempio di sopra si legge: *ventiquattro trilioni*, *ottocentonovantasette bilioni*, *trecentoventuno milioni*, *cinquecentottantamila trecentoquarantasei unità.*

9. I numeri posson considerarsi in due diverse maniere, cioè: nel modo che ho di già fatto, non particolarizzando punto la specie di cosa o d' unità, alla quale essi si rapportano, ed allora si chiamano *numeri astratti*; ovvero accennando la specie delle loro unità, come quando si dice due uomini, cinque anni, tre ore, ec., e questi sono allora dei *numeri concreti.*

È evidente che la formazione dei numeri mediante la riunion successiva delle unità non dipende punto dalla natura di queste unità, e che lo stesso succede riguardo a tutte le proprietà che risultano dalla medesima formazione, dietro le quali s' arriva a comporre, e decomporre i numeri gli uni con gli altri, il che dicesi *calcolare*. Vado dunque ad esporre le principali regole del calcolo dei numeri, senz' aver riguardo alla natura delle loro unità.

DELL' ADDIZIONE.

10. Quest' operazione, la quale ha per fine di riunir più numeri in un solo, non è che un compendio della formazione dei numeri mediante la riunion successiva delle unità. Se, per esempio, a sette si volesse aggiungere cinque,

farebbe di mestieri, nella serie dei nomi *uno*, *due*, *tre*, *quattro*, *cinque*, *sei*, *sette*, *otto*, ec. assegnati ai numeri alzarsi di cinque gradi al di sopra del termine *sette*, ed arriverebbesi allora alla frase *dodici*, la qual corrisponde per conseguenza alla riunione di sette unità con cinque. Sopra di questo metodo son fondate tutte le *addizioni* dei *numeri* piccoli, e di cui i resultati si sono imparati a memoria. La sua applicazione immediata ai numeri un poco grandi sarebbe impraticabile; ma allora si concepiscono decomposti nelle loro diverse collezioni di unità, per effettuar separatamente la riunione di quelle, le quali portano il medesimo nome. Affine di unire, per esempio, 27 con 32, si riuniscono le 7 unità del primo numero colle 2 del secondo, il che fa 6; poi le 2 dicine del primo con le 3 del secondo, il che fa cinque diecine. L'insieme di questi due resultati forma un totale di 5 diecine, e 9 unità, o sivvero, 59 il qual' esprime la somma dei numeri proposti.

Per quando grandi sieno i numeri che bisogna unire insieme, possiamo applicar loro ciò che abbiam di già detto; ma è necessario osservare che le somme parziali, resultanti dall' addizion di due numeri espressi da una sola cifra, spesso produrre delle diecine, o delle unità della collezion superiore, e che debbono in conseguenza esser riunite con quelle di questa collezione.

Nell' addizione dei numeri 49, e 78 la somma delle unità 9 e 8 ne produce 17, delle quali bisogna ritenerne 10, o sivvero una diecina, per unirla alla somma delle diecine dei numeri proposti. Diremo dunque 4, e 7 fanno 11, ed unendovi la diecina ritenuta avremo 12 per il totale delle diecine contenute nella somma di questi numeri, la quale conterrà in conseguenza 1 centinajo, 2 diecine, e 7 unità; il che farà 127.

11. Partendo da questi principii abbiamo trovata una maniera di disporre i numeri da addizionarsi, la quale facilita la riunione delle loro diverse collezioni d' unità, ed abbiam formata una regola, che l' esempio seguente farà sufficientemente conoscere.

Sieno i numeri 527, 2519, 9812, 73, e 8: per sommarli insieme, si comincia da scriverli gli uni sotto gli altri, ponendo le unità del medesim' ordine in una colonna medesima; poi si tira una linea per separarli dal resultato, il quale si pone al disotto.

	527
	2519
	9812
	73
	8
Somma . . .	12939

Si fa primieramente la somma dei numeri contenuti nella colonna delle unità, e siccome si trova 29, non si scrivono che le 9 unità, e si ritengono le 2 diecine per unirle a quelle che son contenute nella colonna seguente, la quale mediante quest' accrescimento contiene 13 unità del suo ordine, non si scrivono neppur al disotto che le 3 unità, e si ritiene la diecina per unirla alla colonna seguente. S' opera sopra questa come sulla precedente, e si trova 19; non si scrivono parimente che le 9 unità, e si ritiene la diecina per la colonna seguente, la cui somma è allora composta di 12 unità; si scrivono le 2 unità sotto questa colonna, o si pone la diecina alla sinistra, il che riducesi a scriver la somma dell' ultima colonna tale come l'abbiamo trovata. Si ha con questo mezzo 12939 per la somma dei numeri proposti.

12. Il metodo, che abbiam seguito, può enunciarsi come segue: *scrivere i numeri da sommarsi gli uni sotto gli altri, e ponendo le loro unità dell' istesso ordine in una colonna medesima, tirare una linea sotto l' ultimo numero per separarlo dal resultato; sommare successivamente, cominciando dalla destra, i numeri contenuti in ciascuna colonna; se la somma non sorpassa* 9, *scriverla tale come si è trovata, e se dessa contiene delle diecine, ritenerle per unirle alla colonna seguente: finalmente all' ultima colonna scriver la somma trovata.*

Potremo esercitarci sopra gli esempi seguenti:

7861	66947	4649
345	46742	928
8028	132684	9298
16229	246373	14875

DELLA SOTTRAZIONE.

13. Dopo d'aver imparato a comporre un numero coll'addizione di più altri, il primo problema, che si presenta, è quello di togliere un numero da un altro, il qual le sorpassi, ovvero, ciò ch'è lo stesso, di decomporre quest' ultimo in due parti, una delle quali sia l'altro numero dato. Se si avesse, per esempio, il numero 9, e che si volesse togliere 4, si verrebbe con questa operazione, decomposto il detto numero in due parti, le quali lo riprodurrebbero coll'addizione.

Per arrivare a toglier un numero da un altro allorchè dessi non sono grandi: bisogna seguire un metodo opposto a quello, che abbiamo prescritto nel principio del n. 10 per trovar la loro somma, e vale a dire, che nella serie dei nomi assegnati ai numeri si deve, a partir dal maggiore di quelli che si considerano, discender di tanti gradi quanto unità vi son nel più piccolo, ed arriveremo al nome appartenente alla differenza cercata: in questa maniera discendendo di quattro gradi al disotto del nome *nove*, arrivasi a *cinque*; nome che esprime il numero, che bisogna aggiungere a 4 per formar 9, oppure, che indica di quanto il 9 sorpassa 4.

Sotto quest' ultimo punto di vista 5 è l'*eccesso* di 9 su 4. Se non si voless'altro che indicare l'ineguaglianza dei numeri 9, e 4, e senza fissar l'attenzione sull'ordine delle loro grandezze, direbbesi che la lor *differenza* è 5. Finalmente, se si facesse l'operazione per toglier 4 da 9 direbbesi che il resto è 5. Si fa manifesto che, sebbene sinonime le parole *resto*, *eccesso*, *differenza*, corrispondon ciascuna ad una maniera speciale di riguardare la decom-

posizione del numero 9 nelle due parti 4, e 5; operazione, che s' indica sempre col nome di *sottrazione*.

14. Allorchè si tratta di numeri un poco grandi, la sottrazione si opera per parti, togliendo successivamente dalle unità di ciascun ordine, espresse nel maggiore dei due numeri, quelle degli ordini corrispondenti espresse nel minore. Per farla comodamente, si dispongono questi numeri come 9587, e 345 nell' esempio seguente.

	9587
	345
Resto . . .	9242

e si pone al disotto di ciascuna colonna l' *eccesso* del numero superiore sul numero inferiore contenuto in essa colonna, dicendo

5 tolto da 7, resta 2,
4 tolto da 8, resta 4,
3 tolto da 5, resta 2,

e ponendo in seguito la cifra 9, da cui non v' è nulla da togliere; il resto 9242 esprime di quanto 5987 sorpassa 345.

L' esattezza del metodo che abbiam seguito, è incontrastabile; poichè togliendo dal maggior de' due numeri tutte le parti contenute nel minore, abbiamo evidentemente tolto tutto questo minore.

15. L' applicazione di questo metodo richiede certe attenzioni particolari allorche alcuni degli ordini di unità del numero da togliersi ne contengono più che gli ordini corrispondenti dell' altro numero.

Se si ha, per esempio, 397 da togliersi da 524

	524
	397
Resto . . .	127

Nell' operazione indicata di sopra non potrem togliere immediatamente le unità del numero inferiore da quelle del numero superiore; ma il numero 524, rappresentato quì da 5 centinaja, 2 diecine, e 4 unità, può esser espresso in un modo diverso decomponendo alcune delle collezioni di unità che desso contiene, per riunirne una parte con altre d'un ordine inferiore. In vece delle 2 diecine, e 4 unità, che lo terminano, possiamo sostituirvi col pensiere, una diecina, e 14 unità: togliendo allora da quest' ultime le 7 unità del numero inferiore, scriveremo al disotto il resto 7. Mediante questa nuova decomposizione, il numero superiore non contien altro che una decina, dalla quale non si potrebbe in conseguenza togliere le 9 del numero inferiore: ma delle 5 centinaja, espresse nel numero superiore, possiamo prenderne 1 per unirla alla diecina restante, ed avremo allora 4 centinaja, e 11 diecine: togliendo da queste quelle del numero inferiore, ne resteranno 2. Finalmente toglieremo dalle 4 centinaja restate nel numero superiore le 3 del numero inferiore; scriveremo il resto 1: ed avremo il resto 127 per resultato dell' operazione proposta.

Questa maniera d' operare consiste, come si vede, nel prendere in prestito dall' ordine superiore un' unità per unirla, secondo il di lei valore, a quelle dell' ordine sul quale s' opera, osservando in seguito di contare per un' unità di meno la cifra superiore allorchè vi arriveremo.

16. Quando mancano degli ordini di unità nel maggior de'due numeri, e vale a dire, mentre vi son degli zeri tra le sue cifre significative, bisogna andare fino alla prima di queste cifre a sinistra per poter conseguirne l' imprestito convenevole. Eccone un esempio:

	7002
	3495
Resto . .	3507

Non potendo toglier le 5 unità del numero inferiore dalle 2 del numero superiore, si prendono 10 unità dal-

le 7000 espresso dalla cifra 7, ne restano allora 6990; ed unendo le 10 prime alla cifra 2, il numero superiore si trova decomposto in 6990, e 12; togliendo da quest' ultimo numero le 5 unità del numero inferiore avremo 7 per le unità del resto.

Questa prima operazione ha lasciato nel numero superiore 6990 unità, oppure 699 diecine, in vece di 700, le quali son espresse dalle tre ultime cifre a sinistra; il che rimpiazza per conseguenza i due zeri con dei 9, e diminuisce di un'unità la prima cifra significativa a sinistra. Continuando sopra questo piede la sottrazione nell'altre colonne, dessa non soffre alcuna difficoltà, e si trova il resto scritto al disotto dell'esempio.

17. Riepilogando le osservazioni che abbiamo fatte nei due numeri precedenti; la regola da seguirsi per operare la sottrazione tra due numeri qualunque può essere enunciata così: *porre il numero minore sotto del maggiore in modo che le loro unità del medesim' ordine siano la stessa colonna; tirare una linea sotto il minor numero per separarlo dal resultato; toglier successivamente in ciascuna colonna, cominciando dalla destra il numero inferiore dal numero superiore; se ciò non è possibile, aumentar la cifra superiore di 10 unità, considerare la prima cifra significativa; la quale vien dopo di questa, per una unità di meno, e se vi son degli zeri intermedj, riguardarli come dei 9.*

18. Si può, per maggiore facilità, allorchè bisognerà diminuire la cifra superiore d' un' unità, considerarla per il suo valore, ed unire quest' unità alla cifra inferiore corrispondente, la quale trovandosi aumentata, conduce, così come debb' essere, ad un resto minore di una unità di quel che risulterebbe dalle cifre scritte. Nel primo degli esempj quì sotto notati, dopo d' aver tolte 6 unità da 14, considereremo la cifra 8 inferiore per un 9, e così degli altri.

16844	103034	49812002
9786	69845	18924983
7058	33189	30887019

DELLA PROVA DELL' ADDIZIONE E DELLA SOTTRAZIONE.

19. Effettuando un' operazione secondo un metodo, la cui legittimità è stabilita su principj sicuri, si possono nulladimeno commettere alcuni errori nelle additazioni, o sottrazioni parziali, delle quali cercasi il risultato, colla nostra memoria: affine di prevenir quest' inconveniente, abbiam ricorso ad un' operazione inversa della precedente, mediante la quale riconoscesi se i risultati di quest' ultima sono esatti: questo è ciò, che dicesi far la *prova* dell' operazione proposta.

Quella dell' addizione consiste nel togliere successivamente dalla somma dei numeri aggiunti tutte le parti di questi numeri; e se l' operazione è stata ben fatta, non si deve trovare alcun resto. Vado a mostrare sull' esempio nel n.° 11 come si effettuano nel medesimo tempo tutte le sottrazioni.

	527
	2519
	9812
	73
	8
Somma . .	12939
	1120

Si sommano primieramente i numeri contenuti nella prima colonna a sinistra, la quale quivi contiene delle migliaja, e se ne toglie la somma 11 dal numero 12, col quale principia il risultato. Si scrive al disotto la differenza 2, prodotta da ciò che abbiam ritenuto sulla colonna delle centinaja nell' operazion primitiva. La somma della colonna delle centinaja, presa isolatamente, non ascende che a 18; se si toglie dalle 9 centinaja scritte nel resultato, ed unite al mille, che proviene dalla colonna precedente a sinistra, e considerato come dieci centinaja, il resto 1 scritto al disotto esprimerà pure ciò che abbiam ritenuto sulla colonna delle decine. La somma 11 di quest' ultima tolta da 13 lascia per resto 2 diecine provenien-

ti da ciò che abbiam ritenuto sulla colonna delle unità. Unendo queste 2 diecine alle 9 unità espresse nel resultato, si forma il numero 29, il quale debb'essere precisamente la somma della colonna dell'unità, sulla quale alcun'altra non vi ha potuto influire; sommando dunque di nuovo i numeri contenuti in questa colonna, dobbiam pure, se l'operazione è stata ben fatta, arrivare al medesimo resultato, e non avere in conseguenza, niun resto. Questo è ciò, che difatto succede nell'esempio attuale, e che vien indicato dallo 0, scritto sotto di questa colonna. Il metodo, che abbiamo spiegato, ristringesi a questo: *per far la prova dell' addizione, bisogna sommar di nuovo principiando dalla sinistra, ciascuna delle colonne dell' operazione; toglier la somma ottenuta in ultimo luogo da quella, ch' è espressa al di sotto; scrivere i resti, che trovansi, ed unirli come tante decine alla colonna seguente a destra: se l' operazione è stata ben fatta, non deve restar nulla nell' ultima colonna.*

20. *La prova della sottrazione ricavasi immediatamente da' ciò che il numero minore unito col resto compone il maggiore.* Così, per assicurarsi dell'esattezza della sottrazione seguente,

$$\begin{array}{rr} & 524 \\ & 297 \\ \hline \text{Resto} \ldots & 227 \\ & 524 \end{array}$$

abbiam aggiunto al resto il numero minore, ed il risultato si è trovato infatti eguale al maggiore.

DELLA MOLTIPLICAZIONE.

21. Allorchè i numeri da sommarsi tra loro son eguali, l'addizione prende il nome di *moltiplicazione* perchè la somma è *allora composta* da uno di questi numeri *ripetuto tante volte quanti sono i numeri da sommarsi*: reciprocamente, se si vuol ripetere un numero più volte, si otterrà sommando questo numero con se medesimo altrettante volte

quant' esso debb' essere ripetuto men una. Per esempio, coll' addizione seguente,

$$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ 16 \\ 16 \\ \hline 64 \end{array}$$

si ripete il numero 16 quattro volte, e si trova sommato tre volte con se medesimo.

Ripetere un numero 2 volte vuol dire *raddoppiarlo*; 3 volte vuol dir *triplicarlo*; 4 volte vuol dire *quadruplicarlo*; e così di seguito.

22. Una moltiplicazione contiene tre numeri, cioè quello che si ripete, e che si chiama *moltiplicando*; il numero che indica quante volte si ripete, e che chiamasi *moltiplicatore*; finalmente il risultato dell' operazione, che si chiama *prodotto*. Il *moltiplicando*, ed il *moltiplicatore*, considerati come concorrenti entrambi a formare il *prodotto*, son chiamati *fattori* di questo *prodotto*. Nell' esempio suddivisato 16 è il *moltiplicando*, 4 il *moltiplicatore*, e 64 il *prodotto*; e rendesi chiaro che 4, e 16 sono i *fattori* di 64.

23. Allorchè il moltiplicando, ed il moltiplicatore sono numeri grandi, la formazion del prodotto mediante l' addizione ripetuta del moltiplicando richiederebbe un tempo considerabilissimo; si è in conseguenza cercato di compendiarla decomponendola in certo numero d' operazioni parziali, facili ad eseguirsi a memoria. Ripeterebbesi per esempio, 4 volte il numero 16, prendendo separatamente il medesimo numero di volte le 6 unità, e la decina, da cui vien composto: serve dunque conoscere i prodotti, che somministrano i numeri delle unità di ciascun ordine del moltiplicando per il moltiplicatore, allorchè quest' ultimo numero non ha che una sola cifra; e ciò riducesi, per tutti i casi possibili, a trovare il prodotto di uno qualunque dei 9 primi numeri per qualunqu'altro di questi numeri.

24. Questi prodotti son contenuti nella tavola seguente attribuita a *Pitagora*.

TAVOLA DI PITAGORA.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

25. Per formar questa tavola, si scrivono primieramente sopra una medesima linea i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Si somma quindi ciascuno di questi numeri con se stesso, e si scrivono le somme sulla seconda linea, la quale si trova composta allora del doppio di ciascun numero della prima ovvero del prodotto di questo numero per 2.

Si sommano parimente con ciascuno dei numeri della seconda linea quelli che lor corrispondono nella prima,

e si dispongon le somme sopra una terza linea, la quale contiene perciò il triplo di ciascun numero della prima, o sivvero i loro prodotti per 3. Mediante l'addizione dei numeri della prima linea con quelli della terza ne formeremo una quarta, la quale conterrà il quadruplo di ciascun numero della prima, ovvero i prodotti di questi numeri moltiplicati per 4; e così di seguito, fino a tanto che non si arriva alla nona linea, la quale contiene i prodotti dei numeri della prima moltiplicati ciascuno per 9.

È a proposito d'osservare che i diversi prodotti d'un numero qualunque pei numeri 2, 3, 4, 5, ec. si chiamano i *multiplici* di questo numero: così 6, 9, 12, 15, ec. sono i multiplici di 3.

26. Quando si è ben concepita la formazione di questa tavola, è facil conoscerne l'uso. Difatto, se dimandisi, per esempio, il prodotto di 7 per 5, bisognerà nella quinta linea, la quale contiene i diversi prodotti dei nove primi numeri moltiplicati per 5, prender quello, che corrisponde al disotto di 7; troveremo così 35: sarebbe lo stesso per qualunque altr'esempio; *il prodotto si troverebbe nella linea del moltiplicatore al disotto del moltiplicando.*

27. Cercando nella tavola di Pitagora il prodotto di 5 per 7; troveremo ancora come quì sopra 35, benchè siasi questa volta considerato 5 come il moltiplicando, e 7 come il moltiplicatore. Quest'osservazione, la qual può ripetersi sopra ciascun dei prodotti cotenuti nella tavola, è generale; e *possiam sempre in qualunque siasi moltiplicazione rovesciar l'ordine dei fattori vale a dire, prendere il moltiplicatore per moltiplicando, ed il moltiplicando per moltiplicatore.*

Siccome la tavola di Pitagora non contiene che un numero limitato di prodotti, non servirà d'aver verificata in questa tavola la conclusione enunciata di sopra; poichè potrebbesi dubitare ch'essa non fosse vera per dei prodotti maggiori, il cui numero è illimitato: non v'è che un ragionamento indipendente da qualunque valore particolare del moltiplicando, e del moltiplicatore, che di-

mostrar possa che la conclusione, di cui si tratta, non soffre alcuna eccezione. Eccone uno tanto più proprio a soddisfare a tal fine, perchè offre un' immagin sensibile della maniera colla quale si forma il prodotto di due numeri. Per farlo comprender meglio, io l'applicherò primieramente ai numeri 5, e 3.

Se si scriva sopra una medesima linea 5 volte la cifra 1, e si pongano due linee simili al disotto della prima; come si vede quì appresso:

1, 1, 1, 1, 1

1, 1, 1, 1, 1

1, 1, 1, 1, 1

il numero totale delle cifre 1 sarà composto di tante volte 5 quante sono le linee, e vale a dire di 3 volte 5; ma per la disposizione di queste line, le cifre 1 son disposte in colonne, le quali ne contengono 3; contandole in questa maniera si trovano tante volte 3 unità quante son le colonne, ovvero cinque volte 3 unità, ed il prodotto non dipendendo punto dalla maniera di contare, ne segue che 3 volte 5, e 5 volte 3 danno il medesimo prodotto. Questo ragionamento è facile a estendersi su dei numeri qualunque; considerando che ciascuna linea contiene tante unità quante ve ne son nel moltiplicando, e che abbiam posto, le une sotto dell' altre, un numero di linee eguale al moltiplicatore. Contando allora il prodotto per mezzo delle linee, desso resulta dal moltiplicando ripetuto tante volte quante unità vi son nel moltiplicatore; ma l' insieme delle cifre scritte presenta tante colonne quante unità vi sono in una linea, e ciascuna colonna contiene tante unità quante sono le linee: se dunque si vuol contar per colonne, ripeteremo il numero delle linee, oppure il moltiplicatore, tante volte quante unità sono in una linea, e vale a dire tante volte quante l' esprime il moltiplicando. È dunque in conseguenza permesso, nella formazion del prodotto di due numeri qualunque siansi, di

prendere per moltiplicatore quello di questi numeri, che si vorrà.

28. Il ragionamento da me or riportato per dimostrare la verità della proposizione precedente n'è la *dimostrazione*; e bisogna osservar bene che ciò che costituisce l'essenze del metodo seguitato nelle Matematiche pure, egli è che non ammettesi alcuna proposizione, o alcuna operazione, che non sia la conseguenza necessaria delle prime nozioni, sulle quali ci siamo appoggiati, o la cui verità non sia stabilita in generale dietro dei ragionamenti indipendenti dagli esempj particolari, che non posson giammai servir di dimostrazione, e non servono che a facilitare al Lettore l'intelligenza dei ragionamenti, ovvero la pratica delle regole.

29. Conoscendo tutti i prodotti, che somministrano i 9 primi numeri combinati tra loro, si può secondo ciò, che abbiamo osservato nel numero 23, moltiplicare un numero qualunque per un altro d'una sola cifra, formando successivamente il prodotto delle unità di ciascun ordine del moltiplicando per il moltiplicatore; e l'operazion si dispone nella maniera seguente.

$$\begin{array}{r} 526 \\ 7 \\ \hline 3682 \end{array}$$

Il prodotto delle unità 6 del moltiplicando per il moltiplicatore 7 essendo 42, non si scrivono che le 2 unità, e ritengonsi le 4 diecine per unirle a quelle, che troveremo in appresso.

Il prodotto delle 2 diecine del moltiplicando per il moltiplicatore 7 è 14, ed unendovi le 4 diecine ritenute precedentemente, si forma il numero 18, del qual non si scrivono parimente se non che le unità, ritenendo la diecina per l'operazione seguente.

Il prodotto 5 delle centinaja del moltiplicando per il

moltiplicatore 7 è 35, aumentatolo di ciò che abbiam ritenuto precedentemente, divien 36, e si scrive tutto intero, perchè non vi sono altre cifre nel moltiplicando.

30. Questo metodo si enuncia così. *Affin di moltiplicare un numero composto di più cifre per un numero di una sola, si pone il moltiplicatore sotto le unità del moltiplicando, si tira una linea al disotto di questo numero, per separarlo dal prodotto; si moltiplican successivamente, cominciando dalla destra, le unità di ciascun ordine del moltiplicando per il moltiplicatore; si scrive il prodotto tutto intero allorchè non passa 9; ma, se desso contien delle diecine, si ritengono per unirle al prodotto seguente; e si continua in questa maniera fino all' ultima cifra a sinistra del moltiplicando, della quale se ne scrive il resultato tal quale come si trova.*

È manifesto che quando il moltiplicando sia terminato da o, l'operazione non deve cominciare se non che alla prima cifra significativa di questo numero; ma per dare al prodotto il valore, che debbe avere è necessario porre alla sua destra tanti o, quanti se ne trovano a quella del moltiplicando. A riguardo de' o, i quali fossero posti tra le cifre del moltiplicando, essi non danno nessun prodotto, e si deve in conseguenza porre uno o allorchè non avrem ritenuto nulla del prodotto precedente.

Ecco degli esempj per esercitare il lettore.

956	8200	7012	80970
6	9	5	4
5736	73800	35060	323880

31. I numeri i più semplici, espressi da più cifre, essendo 10, 100, 1000, ec., bisogna primieramente cercare come si possa moltiplicare per ciascun di questi numeri un altro numero qualunque. Ora, rammentandosi la convenzion stabilita nel numero 6, dietro alla quale una stessa cifra acquista un valore di 10 in 10 volte maggiore a misura che dessa s'avanza verso la sinistra, intenderemo, che

affin di moltiplicare un numero qualunque per 10, bisogna rendere dieci volte maggiore ciascuna delle collezioni d'unità, di cui esso è composto, e vale a dire, cangiare le unità in diecine, le diecine in centinaja, e così di seguito, e che si ottien quest'effetto ponendo uno o alla destra del numero proposto, poichè tutte le sue cifre significative si troveranno avanzate d'un posto verso la sinistra.

In virtù della stessa ragione moltiplicherebbesi un numero qualunque per 100 ponendo alla sua destra due zeri; perocchè mediante il primo zero il numero divenendo dieci volte maggiore di quel che non era in principio, diverrebbe pure dieci volte maggiore per il secondo zero, e sarebbe per conseguenza 10 volte 10, ovvero 100 volte maggiore di quello ch'era da principio.

Continuando questi ragionamenti vedremo che, secondo il nostro sistema di numerazione si moltiplica un numero per 10, 100, e 1000, ec. scrivendo alla destra del moltiplicando tanti zeri quanti ve ne sono nel moltiplicatore alla destra dell'unità.

32. Allorchè la cifra significativa del moltiplicatore è diversa dall'unità, e che trattisi, per esempio, di moltiplicare per 30, o per 300, o per 3000, i quali non sono altra cosa che 10 volte 3, o 100 volte 3, o 1000 3, ec. l'operazione si decompone in due altre; si moltiplica in primo luogo per la cifra significativa 3, secondo la regola del numero 30, ed in seguito moltiplicasi il prodotto per 10, 100, ovvero 1000, ec. (come l'abbiam detto nel numero precedente) scrivendo uno, due, tre zeri alla destra di questo prodotto.

Sia, per esempio 764 da moltiplicarsi per 300.

$$\begin{array}{r} 764 \\ 300 \\ \hline \end{array}$$

Prodotto . . . 229200.

Le 4 cifre significative di questo prodotto risultano dalla

moltiplicazione di 764 per 3; si scrivono due posti indietro dalla sinistra per porre i due zeri, i quali terminano il moltiplicatore.

In generale, *allorchè il moltiplicatore sarà seguitato da un numero qualunque di zeri, si moltiplicherà in primo luogo il moltiplicando per la cifra significativa del moltiplicatore, e si porranno in seguito del prodotto tanti zeri quanti ce ne son nel moltiplicatore.*

33. Le regole precedenti s'applicano al caso ove il moltiplicatore sia qualunque, considerando a parte ciascuna delle collezioni d'unità, di cui esso è composto. Moltiplicar, per esempio, 793 per 345, ovvero, ciò che riducesi allo stesso, ripetere 345 volte il numero 793, vuol dire prender 793, 5 volte, più 40 volte più 300 volte; cosicchè l'operazione da farsi trovasi decomposta in tre altre, nelle quali i moltiplicatori 5, 40, e 300 non hanno che una cifra significativa.

Per riunire facilmente il risultato di queste tre operazioni, si dispone il calcolo nel modo seguente.

```
   793
   345
 ------
  3965
 31720
237900
 ------
273585
```

Si moltiplica successivamente il moltiplicando per le unità, le diecine, le centinaja, ec. del moltiplicatore, osservando di porre un zero alla destra del prodotto parziale dato dalle decine del moltiplicatore, e due zeri alla dritta del prodotto dato dalle centinaja, il che fa avanzare il primo di questi prodotti d'un posto verso la sinistra, ed il secondo di due. Si fa in seguito la somma dei tre prodotti parziali per ottenere il prodotto totale dei numeri dati.

Gli zeri posti in seguito dei prodotti parziali non contando per nulla in questa somma, possiam dispensarci da scriverli, purchè s'abbia cura di mettere al posto, ch'essa debbe occupare, la prima cifra del prodotto dato da ciascuna cifra significativa del moltiplicatore; e vale a dire, al posto delle diecine del moltiplicatore, al posto delle centinaja del moltiplicatore, e così di seguito.

34. Dietro a ciò, che precede, s'enuncia così la seguente regola. *Per moltiplicare due numeri qualunque l'uno per l'altro, si formano successivamente (secondo la regola numero* 30) *i prodotti del moltiplicatore, osservando di porre la prima cifra di ciascun prodotto parziale sotto le unità dell' ordine, di cui è la cifra del moltiplicatore, che dà questo prodotto: e si sommano in seguito tutti i prodotti parziali.*

35. Allorchè il moltiplicando è terminato dagli zeri, si possono da principio trascurar questi, e cominciar tutte le moltiplicazioni parziali dalla prima cifra significativa del moltiplicando; ma, per porre in seguito al posto, che loro conviene, le cifre del prodotto totale, bisogna scrivere alla destra di questo prodotto tanti zeri quanti ve n'erano alla destra del moltiplicando.

Se il moltiplicatore fosse terminato da uno, o più zeri, l'osservazione del numero 32 permetterebbe di trascurare ancor questi, purchè se ne scrivesse un egual numero alla destra del prodotto.

Resulta da ciò che *quando il moltiplicando, ed il moltiplicatore son terminati da zeri, non dobbiamo occuparci in principio che delle cifre significative, e si pongono alla destra del prodotto ottenuto, dopo di queste cifre, tanti zeri quanti ve n'erano sì nel moltiplicando che nel moltiplicatore.*

Allorchè vi son degli zeri tra le cifre significative del moltiplicatore, siccome dessi non danno alcun prodotto, si trascurano osservando di mettere nel posto, che loro

conviene, le unità del prodotto resultante dalla cifra significativa scritta alla sinistra di questi zeri.

Il Lettore potrà esercitarsi su questi esempj.

300	526	9648
40	307	3137
12000	3682	67563
	157800	289440
		964800
	161482	48240000
		49561776

DELLA DIVISIONE.

36. Il prodotto di due numeri essendo formato da uno di questi numeri ripetuto tante volte quante unità vi sono nell' altro (21), possiam ritornare da un prodotto qualunque ad uno de' suoi fattori, cercando quante volte questo prodotto contien l' altro suo fattore: la sottrazione sola è bastante per queste ricerca. Difatto, se si volesse sapere quante volte il 64 contiene il 16, altro non si dovrebbe fare che toglier 16 da 64, tante volte quanto è possibile; e siccome dopo quattro sottrazioni non resterebbe nulla, se ne conchuderebbe che il numero 16 è contenuto 4 volte in 64. Questa maniera di decomporre un numero per un altro, onde saper quante volte desso contiene quest' ultimo chiamasi *divisione*, perchè questa serve a dividere, o a spartire un numero dato in parti eguali, il numero delle quali, o il loro valore sia dato.

Se s' avesse, per esempio, da dividere 64 in 4 parti eguali, per trovare il valore di queste parti, bisognerebbe cercare il numero, ch' è contenuto 4 volte in 64, ed in conseguenza riguardare 64 come un prodotto, che abbia 4 per uno de' suoi fattori; ed in questo caso una del-

le parti cercate è 16. Se si dimandasse di quante parti eguali a 16 il numero 64 è composto, bisognerebbe, per conoscere il numero di queste parti, cercar quante volte 64 contien 16, ed in conseguenza dovrebbesi riguardare 64 come un prodotto, di cui un de' fattori fosse 16, e l'altro il numero cercato, che in questo caso è 4.

Qualunque siasi perciò quello di questi usi, che s'abbia in vista, *la divisione riducesi a trovare un dei fattori d'un prodotto dato, allorchè si conosce l'altro fattore.*

37. Il numero che bisogna dividere, chiamasi *dividendo*; il fattore cognito, e per lo quale si deve dividere, si chiama *divisore*; il fattore incognito, il quale trovasi mediante la divisione, si chiama *quoziente*, ed indica sempre quante volte il divisore è contenuto nel dividendo.

Segue da ciò, che abbiamo detto, *che il divisore moltiplicato per lo quoziente deve riprodurre il dividendo.*

38. Allorchè il dividendo può contenere un gran numero di volte il divisore, non è mai praticabile l'impiegare la sottrazione ripetuta per ottenere il quoziente; fa di mestieri in tal caso ricorre ad un compendio, analogo a quello, che abbiamo dato per la moltiplicazione. Se il dividendo non è 10 volte maggiore del divisore; cosa che può conoscersi dalla sola ispezione di questi numeri, e se il divisore non ha che una sola cifra, troveremo il quoziente col mezzo della tavola di Pitagora; poichè dessa contiene tutti i prodotti, i cui fattori non hanno che una sola cifra. Se si dimandasse, per esempio, quante volte 56 contiene 8, bisognerebbe discendere all' 8va colonna sino alla linea ove si trova 56; la cifra 7, posta alla testa di questa linea, indica il secondo fattore del numero 56, ossia quante volte questo numero contiene 8.

Si fa manifesto da questa medesima tavola che vi sono dei numeri, i quali non possono essere divisi da altri esattamente. Per esempio, la settima linea, che contien tutti i multiplici di 7, non contenendo il numero 40, risulta che desso non è divisibil per 7; ma, siccome questo nu-

mero è compreso tra 85, e 42, si vede che il maggior multiplice di 7, ch' esso possa contenero, è 35, i cui fattori son 5, e 7. Col soccorso di questi elementi, e colle considerazioni, ch' esporrò adesso, si può effettuare una divisione qualunque.

39. Sia, per esempio, da dividersi 1656 per 3; si può cangiare le questione in quest' altra. *Trovare in numero tale, che moltiplicando le sue unità, diecine, centinaja, ec. per 3, ottengansi per prodotto le unità, diecine, centinaja, ec. del dividendo* 1656.

È manifesto che questo numero non avrà unità di un ordine più elevato delle migliaja; poichè, se avesse solamente delle diecine di migliaja, vi sarebbero pure delle diecine di migliaja nel prodotto, e ciò appunto non ha luogo. Non avran luogo neppure le unità dell' ordine delle migliaia; poichè, se una sola ve ne fosse, il prodotto, ne conterrebbe almen 3; e questo pure non ha luogo.

Ciò dimostra che il migliajo, che trovasi, nel dividendo, proviene da quello, che si ritiene quando si moltiplicano pel divisore 3 le centinaja del quoziente.

Ciò posto, la cifra delle centinaja del quoziente cercato debb' essere tale, che moltiplicando il numero, ch' essa esprime per 3, abbiasi per prodotto 16, oppure il multiplo di 3 più prossimo a 16. Questa restrizione è necessaria a motivo delle ritenute che ha potuto somministrare la moltiplicazione dell' altre cifre del quoziente pel divisore, e che abbiam dovuto riunire al prodotto delle centinaja.

Il numero che soddisfa a tale condizione è 5; ma 5 centinaja moltiplicate per 3 danno 15 centinaja, e il dividendo 1656 ne contiene 19: la differenza 1 centinajo proviene dunque dalle ritenute risultanti dalla moltiplicazione dell'altre cifre del quoziente pel divisore. Se adesso si toglie il prodotto parziale 15 centinaja, ovvero 1500, dal prodotto totale 1656, il resto 159 conterrà i prodotti delle unità, e delle diecine del quoziente pel divisore; e tutto si ridurrà a trovare un numero, che moltiplicato per 3 dia 156;

questione precisamente simile a quella, che si è presentata in principio. Così, allorchè avremo trovata la prima cifra del quoziente in quest' ultimo, come l' abbiam fatto nell' esempio precedente, moltiplicheremo il numero, ch' essa esprime, pel divisore; e togliendo questo prodotto parziale dal prodotto totale; avremo per resultato un nuovo dividendo sul quale opereremo come sul precedente; e così di seguito sino a tanto che il dividendo primitivo sia del tutto esaurito.

40. L' operazione, che ho descritta, disponesi come si vede quì sotto.

```
divid.  1656 | 3 divis.
        15   |-------
        ---- | 552 quoz.
         15
         15
         ---
          06
           6
          ---
           0
```

Il dividendo, ed il divisore son separati da una linea; se ne tira un'altra sotto il divisore per indicare il posto del quoziente; ciò fatto, si prende sulla sinistra del dividendo la parte 16, capace di contenere il divisore 3: e divendendola per questo numero, si ha 5 per la prima cifra a sinistra del quoziente; formando in seguito il prodotto del divisore pel numero, che abbiam trovato, e togliendo questo prodotto dal dividendo parziale 16, se ne scrive al disotto il resto 1 a fianco del quale s' abbassano le 5 diecine del dividendo. Considerando quest' ultimo numero come un secondo dividendo parziale, dividesi parimenti pel divisore 3, e si ottiene 5 per la seconda cifra del quoziente; si fa il prodotto di questo numero pel divisore; questo si toglie dal dividendo parziale, e si ha 0 per resto. Abbassasi finalmente l' ultima cifra del dividendo 6, si divide questo terzo dividendo parziale pel divisore 3, e si ha 2 per l' ultima cifra del quoziente.

41. È patente che, se si trovasse un dividendo parziale, che non contenesse il divisore, ciò non potrebbe indicar altro se non che il quoziente non avrà unità dell' ordine di questo dividendo, e che quelle, ch' egli contiene, provengono dai prodotti del divisore per le unità degli ordini inferiori del quoziente: fa di mestieri dunque, quando ciò succeda, porre uno o nel quoziente per riempire il posto dell' ordine delle unità, il quale manca.

Esempio: sia

1525	5
15	307
035	
35	
00	

La divisione delle 15 centinaja del dividendo pel divisore 5 non lasciando alcun resto, le diecine 3, le quali formano il secondo dividendo parziale, non possono contenere il divisore. Ne resulta da ciò che il quoziente non debbe avere delle diecine, e che bisogna in conseguenza riempirne il posto con un o, per dare alla prima cifra del quoziente il valore, che dessa deve avere in rapporto alle altre; dipoi abbassando l' ultima cifra del dividendo, si forma un terzo dividendo parziale, il quale diviso per 5, somministra 7 per le unità del quoziente; e questo numero è 307.

42. Le considerazioni esposte nel numero 40 s' applicano egualmente ai casi dove il rivisore contiene un numero qualunque di cifre.

Se si trattasse, per esempio, di divider 57981 per 251, vedrebbesi facilmente che il quoziente non ha cifre al di là delle centinaja; poichè, s' egli avesse solamente delle migliaja, il dividendo conterrebbe delle centinaja di migliaja, il che non ha luogo; di più, questa cifra delle centinaja debb' esser tale che, moltiplicata per 251, dia

per prodotto 579, oppure il più grande moltiplice di 251 che sia cotenuto in 579: l'eccesso di quest'ultimo deriva allora dalle ritenute risultanti dalla moltiplicazione delle altre cifre del quoziente pel divisore. Il numero, che verifica questa condizione, è 2; ma due centinaja moltiplicate per 251 fanno 502 centinaja, e il dividendo ne contiene 579: la differenza 77 centinaja proviene dunque da ciò, ch'è stato ritenuto nelle moltiplicazione delle unità, e diecine del quoziente pel divisore.

Se adesso si toglie il prodotto parziale 502 centinaja, oppure 50200 dal prodotto totale 57981, il resto 7781 conterrà i prodotti delle unità, e delle diecine del quoziente por il divisore, e tutto si ridurrà a trovare ancora un numero, il quale, moltiplicato per 251, dia per prodotto 7781. Quindi, allorchè avremo determinata la prima cifra del quoziente, moltiplicheremo il numero, che dessa esprime, pel divisore, e togliendo il prodotto parziale dal prodotto totale, avremo per resultato un nuovo dividendo, sul quale opereremo come sul precedente, e così di seguito fino a tanto che il dividendo non sia affatto esaurito.

In generale bisonga sempre, per ottenere la prima cifra del quoziente, separare sulla sinistra del dividendo un numero di cifre sufficiente affinchè il numero, che desse esprimono, considerato come rappresentate delle unità semplici, possa contenere il divisore, ed effettuarsi questa divisione parziale.

43. Disponendo l'operazione come precedentemente si è detto, i calcoli che abbiamo indicati si eseguono nell'ordine seguente.

57981	251
502	231
778	
753	
251	
251	
000	

Si prendono le tre prime cifre a sinistra del dividendo, per formare il primo dividendo parziale; questo si divide pel divisore; si scrive nel quoziente il numero 2 che ne risulta; si moltiplica il divisore per questo numero; si scrive il prodotto 502 sotto il dividendo parziale 579. La sottrazione essendo eseguita, a fianco del resto 77 s'abbassano le diecine 8 del dividendo; si divide questo nuovo dividendo parziale pel divisore; s'ottiene 3 per la seconda cifra del quoziente; si moltiplica il divisore per questo numero. Si togile il prodotto dal dividendo parziale corrispondente, ed a lato del resto 15 abbassasi l'ultima cifra 1 del dividendo: quest'ultimo dividendo parziale 251, essendo eguale al divisore, dà 1 per le unità del quoziente.

44. Allorchè il divisore contiene più cifre, si possono incontrare alcune difficoltà quando si cerca quante volte questo numero è contenuto nei dividendi parziali. L'esempio seguente è destinato per far vedere come vi si possa arrivare.

```
423405 | 485
3880   |-----
-----  | 873
 3540
 3395
 -----
  1455
  1455
  -----
  0000
```

Bisogna primieramente prendere quattro cifre sulla sinistra del dividendo per formare un numero che possa contenere il divisore, ed allora non si conosce a prima vista quante volte 4234 può contenere 485. Per ajutarci in questa ricerca, osserveremo che questo divisore è compreso tra 400, e 500, e che se desso fosse esattamente l'uno o l'altro di questi numeri, la questione sarebbe ridotta a trovar quante volte 4 centinaja, o 5 centinaja son contenute nelle 42 centinaja del numero 3234, ovvero cio

ch'è lo stesso, quante volte i numeri 4, oppur 5 son contenuti in 42. Abbiamo per il primo 10, e per il secondo 8; dunque il quoziente cercato si trova tra questi due numeri. Primieramente si fa manifesto che non è possibile d'impiegar 10, perchè ciò supporrebbe che le unità dell'ordine superiore alle centinaja del dividendo potessero contenere il divisore; il che non ha luogo: non resta dunque che a vedere qual de' due numeri 9, oppure 8, impiegato come moltiplicatore di 485, dia un prodotto, il quale possa togliersi da 4234; e si trova che questo è 8: questa è dunque la prima cifra del quoziente. Togliendo dal dividendo parziale il prodotto del divisore moltiplicato per 8, si ha per resto 354; abbassando in seguito lo o delle diecine del dividendo si forma un secondo dividendo parziale, sul quale s'opera come sul precedente; e così degli altri.

45. L'epilogo degli articoli precedenti ci offre questa regola. *Affin di dividere un numero per un altro, si pone il divisore alla destra del dividendo; questi due numeri si separano con una linea; e se ne tira un'altra sotto il divisore, per segnare il luogo del quoziente. Si prendono sulla sinistra del dividendo tante cifre, quante ne son necessarie per contenere il divisore; si cerca quante volte il numero espresso dalla prima cifra del divisore è contenuto in quello espresso dalla prima, o delle due prime cifre del dividendo parziale; si moltiplica questo quoziente, il quale non è che approssimativo, pel divisore; e se il prodotto è maggiore del dividendo parziale, si tolgon successivamente tante unità dal quoziente quante ne son necessarie per ottenere un prodotto, il qual possa togliersi dal dividendo parziale: si fa quindi la sottrazione, e se il resto fosse maggiore del divisore, ciò sarebbe allora una prova che il quoziente è stato troppo diminuito, ed in conseguenza s'aumenterebbe. Sulla dritta del resto s'abbassa la cifra seguente del dividendo; si cerca, come precedentemente, quante volte questo dividendo parziale contiene il divisore; si scrive nel quoziente il numero trovato il quale si multiplica pel divisore, onde togliere il prodotto dal dividendo parziale; si continua così fino a tanto che si siano state abbassate tutte le cifre del dividendo proposto. Allorchè s'incontra un dividendo parziale, che non*

contenga il divisore, bisogna, prima d'abbassare una nuova cifra del dividendo, porre uno zero nel quoziente.

46. Si restringono in un minore spazio le operazioni ch' esige la divisione, effettuando a memoria la sottrazione de' prodotti del divisore per ciascuna cifra del quoziente, come vedremo nell' esempio seguente.

1755	39
195	
000	45

Dopo d'aver trovato che il primo dividendo parziale 175 contiene 4 volte il divisore 39, si moltiplicano primieramente queste 9 unità per 4, il quale dà 36; e per toglier questo prodotto dalle unità del dividendo parziale, si aggiungono alle 6 unità, che desso contiene: 4 decine il che fa 45, da cui togliendo 36, resta 9. Si ritengon dipoi le 4 diecine per unirle mentalmente al prodotto 12 del quoziente per le diecine del divisore, il che fa 16, e togliendolo da 17, si vengono a togliere le 4 diecine, delle quali s'erano aumentate le unità del dividendo per render possibile la sottrazione precedente. S'opera nella stessa maniera sul secondo dividendo parziale 195, dicendo: 5 moltiplicando per 9 fa 45, che tolto da 45 resta zero, poi 5 moltiplicato per 3 fa 15; con le 4 decine, che sono state ritenute, fa 19 che tolto da 19 resta zero.

Si fa sufficientemente chiaro da ciò come dovrem contenerci in qualunque altro esempio, per complicato che sia.

47. La divisione si abbrevia ancora allorchè il dividendo, ed il divisore son terminati da più zeri, perchè se ne possono sopprimere alla fine di ciascuno di questi numeri tanti quanti ve ne sono in quello, che ne contien meno.

Se s' avesse, per esempio, 84000 da dividere per 400, si ridurrebbero questi numeri a 840 ed a 4; il quoziente non sarebbe alterato; perchè altro non si sarebbe fatto che cangiare il nome delle unità, poichè in luogo di 84000,

oppure di 840 centinaja, e di 400, ovvero di 4 centinaja, avrebbersi 840 unità; e 4 unità ed il quoziente dei numeri 840, e 4 resta sempre lo stesso qualunque sia la specie delle loro unità.

Bisogna pure osservare che supprimendo due zeri alla fine dei numeri proposti, gli abbiam divisi nel medesimo tempo ambedue per 100; poichè segue dal numero 31 che cancellando 1, oppure 2, o sivvero 3 zeri dalla destra d'un numero qualunque, lo dividiamo per 10, oppure per 100, ovvero per 1000; e così di seguito.

Ecco alcuni esempj di divisione:

144	3	16512	344	3049164	6274
24		2752		53956	
00	48	0000	48	37644	486
				00000	

48. la divisione, e la moltiplicazione si servono scambievolmente di prova, come la sottrazione, e l'addizione; poichè, dietro della definizion della divisione (36), si deve, dividendo un prodotto per uno dei suoi fattori, trovare l'altro fattore, e moltiplicando il divisore per lo quoziente, si deve riprodurre il dividendo (37).

DELLE FRAZIONI.

49. La divisione non può sempre effettuirsi esattamente, perchè un numero qualunque d'unità non si compone d'un altro numero qualunque d'unità preso un certo numero di volte. N'abbiamo di già veduti degli esempj nella tavola di Pitagora la quale non contien che i prodotti dei nove primi numeri, moltiplicati a due a due, e che non contiene tutti i numeri compresi tra 1, e 81, il primo, cioè, e l'ultimo di quelli, che vi si trovano iscritti. Il metodo esposto qui sopra non conduce allora che a trova-

re il maggior multiplice del divisore, che possa contenere il dividendo.

Se si dividesse 239 per 8, seguendo la regola del numero 46,

239	8
79	29
7	

come lo dimostra l'operazione di sopra, averebbesi, per ultimo dividendo parziale il numero 79, il quale non contiene 9 esattamente, ma che cadendo tra i numeri 72 e 80, di cui uno contiene 9 volte, e l'altro 10 volte il divisore 8, fa vedere che l'ultima parte del quoziente è maggiore di 9, e minore di 10, e che in conseguenza il quoziente totale cade tra 29, e 30. Moltiplicando dunque la cifra 9 delle unità del quoziente pel divisore 8, e togliendo il prodotto dall'ultimo dividendo parziale 79, il resto 7 sarà evidentemente l'eccesso del dividendo 239 sul prodotto dei fattori 29, e 8. Difatto, avendo colle diverse parti dell'operazione tolto successivamente dal dividendo 239 il prodotto di ciascuna cifra del quoziente intero pel divisore: abbiamo evidentemente sottratto il prodotto del quoziente intero pel divisore, ovvero 232; ed il resto 7, minore del divisore, fa vedere che 232 è il maggior multiplice di 8, che possa esser contenuto in 239.

50. È ben da rammentarsi che dietro ciò, che abbiam detto per riprodurre un dividendo qualunque, fa di mestieri aggiungere al prodotto del divisore per il quoziente il resto, che la divisione ha lasciato allorchè dessa non si è potuta eseguire esattamente.

51. Se si volesse realmente dividere in otto parti eguali una grandezza, di specie qualunque, composta di 239 unità, ciò non potrebbe farsi senza porvi delle porzioni d'unità, cioè delle *frazioni*. Difatto, allorchè si fossero tolte dal numero 239 le 8 volte 29 unità, ch'esso contiene, resterebbero 7 unità da dividersi in 8 parti: per arriva-

re a ciò, si potrebbero dividere, l'una dopo dell' altra, tutte queste unità in 8 parti; poi prendere una parte sopra ciascuna unità il che somministrerebbe 7 parti, le quali dovrebbero esser unite alle 29 unità intere, per formare l'ottava parte di 239, o sia il quoziente esatto dalla divisione di questo numero per 8.

Lo stesso ragionamento potrebbe farsi sopra qualunque altra divisione, che conducesse ad un resto, ed in questo caso il quoziente si compone di due parti: l'una è formata d' unità intere, mentre che l' altra non può ottenersi se non se dopo che s'è effettuata realmente la divisione delle unità concrete, o materiali del resto in un numero di parti indicato dal divisore: per adesso non si fa che indicarla dicendo, *che bisogna concepir l' unità del dividendo divisa in tante parti quante unità vi sono nel divisore, e prendere tante di queste parti quanti unità vi sono nel resto, per completare il quoziente cercato.*

52. In generale, allorchè abbiam voluto considerare delle quantità minori delle unità, è bisognato per apportarle a questa unità, concepirla divisa in un certo numero di parti tanto piccole da poter essere contenute un certo numero di volte in queste quantità, ossia, *misurarle*. Nell' idea; che ci abbiano così formata dalla loro grandezza, vi sono dunque entrati due elementi, cioè, quante volte le parti che le misurano, sono contenute nell'unità, ed il numero ch' esse ne contengono.

S'è composta per le frazioni una nomenclatura: la qual corrisponte alla maniera di concepirle, e rappresentarle.

Quelle, che risultano dalla divisione dell' unità in 2 parti eguali, si chiamano *mezzi*,

in 3	parti	*terzi*,
in 4	parti	*quarti*,
in 5	parti	*quinti*,
in 6	parti	*sesti*,
in 11	parti	*undicesimi*,
in 12	parti	*dodicesimi*,

e così di seguito, aggiungendo la desinenza *esimi* al numero, ch' esprime quante parti si concepiscono nell' unità.

Qualunque frazione s' esprime allora con due numeri, il primo, che fa conoscere di quante parti dessa è composta, si chiama *numeratore*; ed il secondo, che indica quante di queste parti son necessarie por formar l' unità, si chiama *denominatore*, perchè se ne deduce la denominazione della frazione. *I cinque sesti* dell' unità sono una *frazione*, di cui il *numeratore* è 5, ed il denominatore è 6.

Il *numeratore* ed il *denominatore* si chiamano insieme i due *termini* della frazione.

Ci serviamo delle cifre per abbreviar l' espressione delle frazioni, scrivendo il denominatore sotto del numeratore separati l' uno dell' altro da una linea.

un terzo si scrive $\frac{1}{3}$

cinque sesti . . . . $\frac{5}{6}$

53. Dietro all' idea che si annette alle parole *numeratore e denominatore*, è evidente *che si aumenta una frazione aumentando il suo numeratore senza cangiare il suo denominatore*; poichè quest' ultimo esprimendo in quante parti l' unità è divisa, fissa la grandezza di queste parti, la quale resta la stessa fintantochè il denominatore non cangia; ed aumentando il numeratore, si aumenta il numero delle parti contenute nella frazione, ed in conseguenza questa frazione. Così, per esempio, $\frac{8}{9}$ sorpassano $\frac{7}{9}$, e $\frac{13}{30}$ sorpassano $\frac{11}{30}$.

Segue evidentemente da questa considerazione che *ripetendo il numeratore* 2, 3, *o un numero qualunque di volte, e restando le stesso il suo denominatore, si ripete un e-*

gual numero di volte la quantità rappresentata dalla frazione, oppure dessa si trova moltiplicata per questo numero; poichè questa frazione componesi allora di 2, 3, oppure d' un numero qualunque di volte di tante parti quante essa ne conteneva da principio, e queste parti sono restate le medesime. La frazione $\frac{3}{5}$ è dunque il tripulo di $\frac{1}{5}$ e $\frac{10}{21}$ il doppio di $\frac{5}{21}$.

Si diminuisce una frazione diminuendo il suo nnmeratore, senza cangiare il suo donominatore; poichè si prende per comporla un minor numero di parti di quello che essa ne conteneva da principio, e queste parti hanno conservato la medesima grandezza; Dunque, *se si divide per* 2, 3, *ovvero per un numero qualunque, il numeratore d' una frazione, senza cangiare il suo denominatore, dessa si rende un egual numero di volte minore, oppure essa si trova divisa per questo numero*; poichè questa riducesi a contenere 2, 3, oppure un numero qualunque di volte meno parti di quel che essa ne conteneva da principio, e queste parti son restate le medesime. Così $\frac{1}{5}$ è il terzo di $\frac{3}{5}$ $\frac{5}{21}$ son la metà $\frac{10}{21}$.

54 Al contrario, *si diminuisce una frazione allorchè si aumenta il suo denominatore, senza cangiare il suo numeratore*; poichè allora si concepiscon più parti nella unità; desse divengon dunque più piccole, e siccome non se ne prende che lo stesso numero per formar la frazione, il loro insieme compone nel secondo caso una quantità minor che nel primo. In tal maniera $\frac{2}{5}$ è minore di $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{13}$ minore di $\frac{4}{9}$.

Segue di ciò che, *se si moltiplica per* 2, 3, *ovvero per un numero qualunque, il denominatore d'una frazione, senza cangiare il suo numeratore, la frazione diviene un egual numero di volte più piccola, ovvero si trova divisa per ques-*

to numero; poichè dessa si compone sempre di tante parti quante ne conteneva da principio, ma ciascuna è divenuta 2, 3, oppure un numero qualunque di volte minore. La frazione $\frac{3}{8}$ è la metà di $\frac{3}{4}$, e $\frac{4}{15}$ il terzo di $\frac{4}{5}$.

Si aumenta una frazione allorchè si diminuisce il suo denominatore senza cangiare il suo numeratore; poichè, siccome si concepiscono allora meno parti nella unità, ciascuna di queste divien maggiore, ed il loro insieme diventa anche maggiore.

Dunque, *se si divide il denominatore di una frzione per* 2, 3, *ovvero per un numero qualunque si rende questa frazione un simil numero di volte maggiore che per l' avanti, oppure dessa si trova moltiplicata per questo numero*; poichè queste si compone sempre del medesimo numero di parti, ma divenuta ciascuna di questa 2, 3, oppure un numero qualunque di volte maggiori di quel che desse non lo erano in principio. In conseguenza di ciò $\frac{3}{5}$ sono il triplo di $\frac{3}{15}$, $\frac{5}{6}$ sono il quadruplo di $\frac{5}{24}$.

È a preposito d' osservare che sopprimere il denominatore d' una frazione è lo stesso che moltiplicarla per questo numero. Sopprimere, per esempio, il denominatore 3 nella frazione $\frac{2}{3}$ vuol dir cangiarla in due interi, oppure moltiplicarla per 3.

55. Si posson riepilogare nel modo che segue, le precedenti proposizioni:

Moltiplicando Dividendo	il numeratore	si moltiplica si divide	la frazione:
Moltiplicando Dividendo	il denominatore	si divide si moltiplica	la frazione:

36. La prima conseguenza, che dobbiamo ricavare da

questa tavola, si è che le operazioni fatte sul denominatore producono sulla quantità rappresentata dalla frazione l'effetto delle operazioni *contrarie*, ed *inverse*. Ne resulta ancora che, *se si multiplicano simultaneamente il numeratore, ed il denominatore d'una frazione per lo medesimo numero, la frazione non cangerà di valore*; poichè se da un lato, moltiplicando il numeratore, si rende la frazione 2, 3, ec. volte maggiore di prima, dall'altro, per la seconda operazione, se ne prende la metà, il terzo; ec.; in una parola, si divide la frazione per lo medesimo numero, pel quale si era in primo luogo moltiplicata. Così $\frac{1}{5}$ è eguale a $\frac{3}{15}$, e $\frac{5}{21}$ sono eguali a $\frac{10}{42}$.

57. *Vedensi parimente che se, si dividono simultaneamente per lo stesso numero di denominare ed il numeratore d'una frazione, il suo valore non cangia*; poichè, se da un lato dividendo il numeratore si rende la frazione 2, 3, ec. volte minore che per l'avanti, dall'altro, mediante la seconda operazione, se ne prende il doppio; il triplo, ec.: in una parola, dessa si moltiplica per un medesimo numero, pel quale si era in principio divisa. Così la frazione $\frac{3}{4}$ è eguale a $\frac{1}{2}$, e $\frac{3}{9}$, è eguale a $\frac{1}{3}$.

58. Non succede nelle frazioni come nei numeri interi, nei quali una grandezza, fintantochè dessa, si rapporta alla medesima unità, non è capace che d'una sola espressione; nelle frazioni al contrario, la medesima grandezza può essere espressa in un infinità di maniere. Per esempio, tutte le frazioni,

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}, \text{ec.}$$

il denominat or delle quali contiene due volte il numeratore, esprim ono, sotto diverse forme, la metà dell'unità. Le frazioni,

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15}, \frac{6}{18}, \frac{7}{21}, \text{ec.}$$

il denominatore delle quali contiene 3 volte il numeratore, rappresentano tutte il terzo dell' unità. Ma tra tutte le forme che prende, nell' uno e nell' altro esempio, la frazione proposta, la prima è la più notabile, come essendo la più semplice; ed è bene in conseguenza il saperla trovare in ciascuna dell' altre: ora questo è quello appunto, a cui si perviene dividendo i due termini di queste per il medesimo numero, il che come lo abbiamo veduto, non ne cangia il valore. Difatto, se si dividono per 7 i due termini della frazione $\frac{7}{14}$ ricaderemo sopra $\frac{1}{2}$, e facendo pure la medesima operazione sulla frazione $\frac{7}{21}$, ne dedurremo $\frac{1}{3}$.

59. Seguendo quest' ultimo metodo, si può ridurre una frazione alla sua *più semplice espressione*. Desso non può applicarsi che alle frazioni, di cui il numeratore, e il denominatore si trovano divisibili per lo medesimo numero; e, in tutti gli altri casi, la frazione proposta è la più semplice di tutte quelle, che posson rappresentare la quantità, ch' essa esprime.

Così le frazioni

$$\frac{5}{7}, \quad \frac{7}{12}, \quad \frac{5}{16},$$

di cui i termini non posson esser divisi per un medesimo numero, ovvero *non hanno alcun divisore comune fuori di* 1, sono *irriducibili*; e non potrebbero per conseguenza esprimere in una maniera più semplice le grandezze, che esse rappresentano.

60. Segue da ciò che, affine di semplicizzare una frazione, bisogna tentar di dividere i suoi due termini per alcuno dei numeri 2, 3, ec.; ma mediante questi tentativi non arriverem sempre alla più semplice espressione della frazione proposta, oppure bisognerà almeno il più spesso effettuare un gran numero di operazioni.

Se s' avesse, per esempio, la frazione $\frac{24}{84}$, si potrebbe osservare in primo luogo che ciascun de' suoi termini è un multiplice di 2, e dividendoli per questo numero; si otterrebbe $\frac{12}{42}$; dividendo in seguito per 2 i due termini di quest' ultima, se ne dedurrebbe $\frac{6}{12}$.

Benchè digià molto più semplice della proposta, questa frazione è ancora capace di riduzione; poichè si posson dividere i suoi due termini per 3, e s' ottiene allora $\frac{2}{7}$.

Se si fa attenzione che dividere un numero per 2, poi dividere il quoziente per 2, poi ancora questo nuovo quoziente per 3, è la medesima cosa che divider da principio il numero primitivo per il prodotto de' numeri 2, 2, e 3, che vuol dire 12, vedremo che le tre operazioni suddivisate possono effettuarsi in una sola volta, dividendo i due termini della frazione proposta per 12; ed avremo egualmente $\frac{2}{7}$.

I numeri 2, 3, 4 e 12, dividendo ciascuno nel medesimo tempo i due numeri 24, e 84, sono i divisori comuni di questi numeri; ma il 12 si distingue dagli altri, perchè desso è il *massimo*: ed impiegando questo *massimo comun divisore* dei due termini della frazione proposta, dessa riducesi immediatamente alla sua più semplice espressione. È dunque una ricerca utile quella, di: *trovare tra due numeri dati, il massimo comune divisore.*

61. Arrivasi alla cognizione del comun divisore di due numeri mediante una specie di tentativo facile a discoprirsi, e che ha il vantaggio di avvicinare allo scopo a ciascun passo che facciasi. Per ispiegarlo chiaramente, prenderò un esempio.

Siano i due numeri 637, e 143. Il massimo, comune divisore di tali numeri non può evidentemente eccedere il

minore de' due: convien dunque tentare se il numero 143, ch'è divisor di se stesso, e dà per quoziente 1, può dividere pure il numero 637, nel qual caso sarebbe egli stesso il massimo comune divisore cercato: ma nell'esempio proposto ciò non accade e si trova un quoziente 4, ed un resto eguale a 65.

Ora egli è manifesto che qualunque divisore comune ai due numeri 637, e 143 deve dividere ancora il resto 65 della lor divisione; poichè il maggiore 637 è eguale al minore 143 moltiplicato pel quoziente 4 più il resto 65 (50): ora, dividendo 637 pel divisore comune cercato, avremo un quoziente esatto, bisogna dunque che se n'abbia pure un simile dividendo per lo medesimo divisore ciascuno delle parti nelle quali 637 è decomposto, e riunendone i i risultati, ma il prodotto di 143 per 4 dividesi necessariamente per le divisor comune, il quale è fattore di 143: bisogna dunque che l'altra parte 65 sia pure divisibile per questo divisore; senza di che il quoziente totale sarebbe un intero accompagnato da una frazione, e non potrebbe in conseguenza eguagliare il numero intero resultante dalla divisione di 637 pel comun divisore.

Reciprocamente qualunque divisore comune a 65 ed a 143 dividerà il 637, composto di 4 volte il 143 più il 65.

Collo stesso ragionamento si proverà in generale *che ogni divisore comune a due numeri deve dividere il resto della divisione del maggiore dei due pel minore; e che qualunque divisore comune a questo numero minore, ed al resto, deve dividere il maggiore.*

Dietro a questo principio si vede che il massimo comun divisore dei numeri 637, e 143 debb'esserlo pure dei numeri 143, e 65, e che quello di questi ultimi debb'esserlo di 637 e di 143: ma il 65 non potendo esser diviso da un numero maggiore di sè stesso, bisogna dunque provare prima questo. Dividendo 143 per 65 si trova un quoziente 2, e un resto 13; 65 non è dunque il divisore cercato. Con un ragionamento simile a quello, che si è fatto riguardo ai numeri 637, 143, e per il resto 65 della

lor divisione, si vedrà che ogni divisore comune di 143, e di 65 debb' esserlo pure dei numeri 65, e 13; ora, il massimo comun divisore di questi ultimi non può superar 13; bisogna dunque tentare se 13 divide 65, il che accade, poichè si dà per quoziente 5.

Dunque 13 è il massimo comun divisore cercato; poichè essendo il massimo comune divisore di sè medesimo e di 65, debbe esserlo di 65 e di 143, e che essendolo di questi numeri debbe esserlo di 143 e di 637.

È comodo in pratica di porre le divisioni successive in seguito le une dell' altre, e di disporre l' operazione come si vede qui sotto:

637	143	65	13
65	4	2	5
	13	0	

separando i quozienti 4, 2, 5 da' resti scritti al di sotto.

I ragionamenti impiegati nell' esempio precedente, potendo applicarsi a de' numeri qualunque, conducono a questa regola generale: *Si troverà il massimo comun divisore di due numeri dividendo il maggiore di questi numeri per il minore; dividendo quindi il minore per il resto della prima divisione; poi dividendo questo resto per quello della seconda divisione; poi dividendo questo secondo resto per il terzo resto, ossia per quello della terza divisione; e continuando così a dividere il resto di ciascuna operazione per quello della seguente, finchè si giunga a un quoziente esatto; l' ultimo divisore sarà il massimo comun divisore cercato.*

62. Ecco due esempj di quest' operazione:

9024	3760	1504	752
1504	2	2	2
	752	000	

752 è dunque il massimo comun divisore di 9024, e 3760

937	47	44	3	2	1
467	19	1	14	1	2
44	3	14	1	0	
		2			

Si vede da quest' ultima operazione che il *massimo comun divisore* di 937, e 47 è solamente 1, cioè che propriamente parlando questi due numeri non hanno divisore comune, poichè tutti i numeri intieri, qualunque essi sieno, sono tutti divisibili per 1.

Non è difficile di convincersi che la regola del numero precedente deve necessariamente condurre a questo risultato tutte le volte che i numeri proposti non avranno divisore comune; poichè i resti essendo sempre minori del divisore, divengono di mano in mano più piccoli a ciascuna operazione; ed è chiaro che le divisioni si continueranno finchè si avrà un divisore maggiore dell' unità.

63. Col mezzo di questi calcoli, le frazioni $\frac{143}{637}$, $\frac{3760}{9014}$ si riducono subito alla loro più semplice espressione, dividendo i due termini della prima per il loro divisore comune 13, e quelli della seconda, per il loro divisore comune 752; così si ottengono $\frac{11}{49}$, $\frac{5}{12}$. In quanto alla frazione $\frac{47}{937}$, dessa è assolutamente irriducibile, poichè i suoi due termini non hanno altro divisore comune che l' unità.

64. Non è sempre necessario tentar la ricerca del massimo comun divisore de' due termini della frazione proposta; vi sono, come abbiam fatto osservare di sopra, delle riduzioni, le quali si offrono da loro medesime.

Qualunque numero terminato da una delle cifre 0, 2, 4, 6, 8 è necessariamente divisibile per 2; poichè, sic-

come dividendo un numero qualunque per 2, non può restare che 1 sulle diecine, l'ultima divisione parziale si effettuirà su i numeri 0, 2, 4, 6, 8, se le diecine non han lasciato resto alcuno sopra i numeri 10, 12, 14, 16, 18, se desse n'hanno lasciato: e tutti questi numeri son divisibili per 2.

I numeri divisibili per 2 si chiamano *numeri pari*, per dessi posson esser divisi in due parti eguali.

Parimente qualunque numero terminato verso la destra da un zero, oppure da un 5, è divisibile per 5; poichè, allorquando saremo arrivati alla divisione delle diecine per 5, il resto, se v'è, sarà necessariamente 1, 2, 3, oppure 4 diecine; di maniera che, se l'ultima cifra è uno 0, oppure un 5, l'operazione si terminerà sopra uno dei numeri 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, tutti divisibili per 5.

I numeri 10, 100, 1000, ec. espressi dall'unità seguita da qualunque numero di zeri, posson essere decomposti in 9 più 1, 99 più 1, 999 più 1, e così di seguito; ed i numeri 9, 99, 999 ec. essendo divisibili per 3, e per 9, segue da ciò che, se si dividono per 3, o per 9 i numeri della forma 10, 100, 100, ec., il resto della divisione sarà 1.

Ora un numero che, come, 20, 300, 500, è espresso da una sola cifra significativa, seguita verso la destra da un qualsisia numero di zeri, può essere decomposto in più numeri espressi dall'unità seguita verso la destra da un certo numero di zeri; 20 è eguale a 10 più 10; 300 a 100 più 100 più 100; 5000 a 1000 più 1000 più 1000 più 1000 più 1000, e così degli altri. Segue da ciò che, se si divida 20, oppure 10 più 10, per 3, o per 9, il resto sarà 1 più 1, ovvero 2; se si divida 300, oppure 100 più 100 più 100 per 3, o per 9, il resto sarà 1 più 1 più 1 overo 3.

In generale, se si decompone nella stessa maniera un numero espresso da una sola cifra significativa seguita

verso la destra da qualunque numero di zeri, affin di dividersi per 3, oppure per 9, il resto di questa divisione sarà eguale a tante volte 1 quante unità vi sono nella cifra significativa, e vale a dire, sarà eguale alla cifra significativa medesima. Ora un numero qualunque siasi essendo decomposto in unità diecine, centinaja, si trova formato dalla riunione di più numeri espressi da una sola cifra significativa; e se si divida ciascuna di questi ultimi per 3 oppure per 9, avremo per resto una delle cifre significative del numero proposto: per esempio, la divisione delle centinaja, darà per resto la cifra delle centinaja; la divisione delle diecine la cifra delle diecine, e così dell'altre. Se dunque la somma di tutti questi resti fosse divisibile per 3, o per 9, la divisione del numero proposto per 3, o per 9 potrebbe farsi esattamente; dal che ne segue che la somma delle cifre d'un numero è divisibile per 3, o per 9, anco questo numero è divisibile per 3, o per 9.

Così i numeri 423, 4251, 15342 son divisibili per 3, perchè la somma delle cifre significative è 9 nel primo, 12 nel secondo, e 15 nel terzo.

Parimente 621, 8280, 934218 son divisibili per 9, poichè la somma delle cifre significative è 9 nel primo, 18 nel secondo, e 27 nel terzo.

Osserveremo che qualunque numero divisibile per 9 è ancora divisibile per 3, benchè qualunque numero divisibile per 3 non lo sia ancora per 9.

Si potrebbero fare altresì sopra diversi altri numeri osservazioni analoghe a quelle, che ho esposte sopra 2, 3, 5 e 9: ma la ricerca di queste proprietà troppo mi allontanerebbe dal mio assunto per non trattenermivi.

I numeri 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ec., i quali non posson esser divisi che per loro medesimi, o per l'unità si chiamano *numeri primi*. Due numeri, come 12, e 35, che hanno, ciascuno in particolare dei divisori, ma

di cui ciascuno non è comune all'uno, ed all'altro, si dicono *primi tra loro* (*).

Una frazione irriducibile ha in conseguenza per numeratore, e per denominatore dei numeri primi tra di loro.

65. La somma e la sottrazione non hanno alcuna difficoltà quando le frazioni, sulle quali dobbiamo effettuare quest'ultime operazioni, hanno lo stesso denominatore; siccome desse non contengono che delle parti della stessa denominazione; ed in conseguenza della grandezza medesima; possiam sommarle oppur sottrarle nella stessa maniera come se fossero delle unità, osservando d'indicare nel resultato la denominazione delle parti, di cui esso è composto.

È evidente difatto che $\frac{2}{11}$ e $\frac{3}{11}$ fanno $\frac{5}{11}$, nello stesso modo che 2 quantità e 3 quantità della medesima specie ne fanno 5 di questa specie, qualunque essa siasi.

Parimente, la differenza tra $\frac{3}{9}$, e $\frac{8}{9}$ è $\frac{5}{9}$, nello stesso modo che la differenza tra 3 quantità, e 8 quantità della medesima specie è 5 quantità di questa specie, qualunque essa siasi.

Dobbiam concluder da ciò che, *per sommare o sottrarre le frazioni del medesimo denominatore, bisogna prender la somma, oppure la differenza dei loro numeratori, e dare al resultato il denominatore comune.*

66. La somma delle frazioni conduce spesso a resultati, i quali sorpassano l'unità. Se si sommassero, per esempio, $\frac{4}{8}$ e $\frac{7}{8}$, la somma sarebbe $\frac{8}{11}$; quest'espressione de-

(*) Vedremo nel num. 162 come bisogni contenersi per decomporre un numero nei suoi fattori semplici o *primi*.

signando 11 parti, sotto delle quali riunite compongono l'unità, equivale all'unità più tre ottavi d'unità, oppure a 1 $\frac{3}{8}$.

In generale qualunque espressione frazionaria, il cui numeratore sorpassa il denominatore, contiene delle unità ovvero degl'*interi*, *e si estraggono gl'interi dividendo il numeratore pel denominatore: il quoziente somministra il loro numero; ed il resto posto in frazione è quello che li deve accompagnare.*

Per esempio, l'espressione $\frac{307}{53}$, dinotando 307 parti, 53 delle quali compongono l'unità, vi sono nella quantità, che rappresenta questa espressione, tante unità quante sono le volte che 307 contiene 53; facendo la divisione, si ottiene 5 per quoziente e 42 per resto; questi 42 sono dei *cinquanta-treesimi* d'unità: così, in $\frac{307}{53}$ può scriversi 5 $\frac{42}{53}$.

67. L'espressione 5 $\frac{42}{53}$, nella quale gl'interi son manifesti, essendo composta di due parti differenti, egli è spesso utile di ritornare all'espressione primitiva $\frac{307}{53}$; quest'è ciò che dicesi *ridurre un intero in frazione.*

Affine di pervenirvi, *fa di mestieri moltiplicare l'intiero pel denominatore della frazione che la accompagna, aggiungere il suo numeratore al resultato, e dare alla somma il donominatore della frazione medesima.*

Infatti, è necessario in primo luogo convertire i cinque interi in cinquanta-trecesimi, lochè si effettuerà moltiplicando 53 per 5; poichè ciascuna unità deve contenere cinquantatre parti; il resultato sarà $\frac{265}{53}$: riunendo questa parte colla seconda $\frac{42}{53}$, otterremo $\frac{307}{53}$.

68. Quando le frazioni proposte hanno dè denominato-

ri diversi, non si possono allora addizionare insieme, oppure sottrarre l'uno dall'altro i numeri delle parti, di cui esse sono composte; poichè queste parti son di differenti grandezze; e, per ovviare a quest'inconveniente, si fa subire a queste frazioni una trasformazione, la quale le riduce a parti della grandezza medesima, dando loro un denominatore comune.

Siano, per esempio, le frazioni $\frac{2}{3}$, e $\frac{4}{5}$; se si moltiplichino per 5, denominatore della seconda, i due termini della prima, convertiremo questa prima in $\frac{15}{10}$; dipoi moltiplicando per 3, denominatore della prima, i due termini della seconda, convertiremo questa seconda in $\frac{12}{15}$: formeremo in tal modo due nuove espressioni, le quali avranno lo stesso valore delle due frazioni proposte (56).

Quest'operazione necessaria per paragonare le grandezze rispettive di due frazioni non consiste, in sostanza, che nel trovar, per esprimerle, delle parti di unità tanto piccole, onde poter esser contenute esattamente in ciascuna di quelle, di cui si formano le frazioni proposte. È manifesto, nell'esempio suddivisato, che la quindicesima parte dell'unità può misurare esattamente $\frac{1}{2}$, e $\frac{1}{5}$ di quest'unità, poichè $\frac{1}{3}$ contiene cinque 15esimi e $\frac{1}{5}$ ne contiene tre. Il metodo applicato alle frazioni $\frac{2}{3}$, e $\frac{4}{5}$ riescirebbe egualmente sopra altre frazioni, qualunque si fossero.

In generale, *per ridurre allo stesso denominatore due frazioni qualunque, fa di mestieri moltiplicare i due termini di ciascuna pel denominatore dell'altra.*

69. *Si riduce simultaneamente al medesimo denominatore un numero qualunque di frazioni moltiplicanto i due termini di ciascuna pel prodotto dei denominatore di tutte l'altre*; poichè egli è manifesto che i nuovi denominatori sono gli

stessi, perchè ciascuno è formato dal prodotto di tutti i denominatori primitivi; e che le nuove frazioni sono del valore medesimo dalle prime, imperciocchè altro non si è fatto che moltiplicare i due termini di queste per un medesimo numero (59).

La regola precedente conduce, in tutti i casi, al fine che ci siamo proposti: ma allorchè i denominatori delle frazioni, di cui si tratta, non sono primi tra loro, esiste un denominator comune più semplice di quello che dà la predetta regola; e vi si giunge mediante delle considerazioni analoghe a quelle dei numeri antecedenti. Se s'avessero, per esempio, le frazioni

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8},$$

siccome non trattasi, per ridurle al medesimo denominatore che di dividere l'unità in parti tali, che sian contenute esattamente in quelle di cui queste frazioni si formano, servirà di trovare il più piccol numero che possa dividersi esattamente per ciascun dei lor denominatori 3, 4, 6, 8; e lo scopriremo tendando sopra i multipli di 3 le divisioni per 4; 6, e 8, le quali non riescono in primo luogo che su 24: ciò fatto, altro non resterà che convertir le frazioni proposte in 24esimi dell'unità.

Per effettuar quest'operazione, cercheremo successivamente quante volte i denominatori 3, 4, 6, e 8 son contenuti in 24; ed i quozienti saranno i numeri, pei quali bisognerà moltiplicare respittivamente i due termini di ciascuna frazione, onde ridurla al denominatore 24. Troveremo in tal maniera, che i due termini della frazione $\frac{2}{3}$ debbon essere moltiplicati per 8, quelli di $\frac{3}{4}$ per 6, quelli di $\frac{5}{6}$ per 4, quelli di $\frac{7}{8}$ per 3, e formeremo le frazioni.

$$\frac{16}{24}, \frac{18}{24}, \frac{20}{24}, \frac{21}{24}.$$

Vedremo nell' Algebra alcuni mezzi per facilitare l' applicazione di questo metodo.

70. La regola data precedentemente per la riduzione delle frazioni allo stesso denominatore suppone, che un prodotto resultante dalle moltiplicazione successive di più numeri fra loro non cangi, qualunque sia l'ordine, col quale si effettuano queste moltiplicazioni. Una tal verità, che si riguarda quasi sempre come evidente, ha però bisogno d' essere dimostrata.

Bisogna cominciar dal provare, che moltiplicare un numero per il prodotto di due altri è lo stesso che moltiplicarlo prima per l' uno d' essi, e moltiplicar poi il prodotto risultante per l' altre. In vece di moltiplicare, per esempio, 3 per 35, prodotto dei numeri 5 e 7, si sarebbe potuto moltiplicare 3 per 5, e moltiplicare dipoi il prodotto di questi numeri per 7. La proposizione sarebbe evidente se in vece del numero 3 si prende l' unità, perchè 1 moltiplicato per 5 dà 5, e il prodotto di 5 per 7 dà 35, del pari che il prodotto di 1 per 35: ma 3, o qualunque altro numero non essendo che l' unione di più unità, non seguirà di questo numero che ciò che segne di ciascuna delle unità, di cui è composto, e vale a dire, che i prodotti di 3 per 5, e per 7 ottenuti nell' una, e nell' altra manira essendo nei due casi il triplo de' resultati, che dà l' unità moltiplicata per 5, e per 7, saranno necessariamente gli stessi. Si proverebbe nella medesima maniera che se si avesse da moltiplicare 3 per il prodotto de' numeri 5, 7, e 9, ciò ridurrebbesi a moltiplicare 3 per 5, poi il prodotto trovato per 7, e quest' ultimo prodotto per 9, e così in seguito, qualunque fosse il numero de' fattori.

Per indicare in una maniera compendiosa più moltiplicazioni successive, come quelle dei numeri 3, 5, e 7, fra loro, scriveremo 3 per 5 per 7.

Posto ciò, nel prodotto 3 per 5 si può cangiare l' ordine dei fattori 3, e 5 (27), e si avrà sempre il me-

desimo prodotto. Di qui ne segue immediatamente che 5 per 3 per 7 è lo stesso che 3 per 5 per 7.

Si può anche cangiar l'ordine dei fattori 3, e 7 nel prodotto 5 per 3 per 7, poichè questo prodotto equivale a 5 moltiplicato per il prodotto de' numeri 3, e 7; si avrà dunque ancora in 5 per 7 per 3 il medesimo prodotto che i precedenti.

Riunendo le tre combinazioni

3 per 5 per 7
5 per 5 per 7
5 per 7 per 3

si vede che il fattore 3 si è trovato successivamente il primo, il secondo ed il terzo, e che potrebbe esser lo stesso per uno qualunque degli altri due. Quest'esempio, nel quale non si è punto considerato il valor particolare di ciascun numero, deve provare che un prodotto di tre fattori non cangia, qualunque ordine si stabilisca nelle moltiplicazioni.

Se si avesse un prodotto di 4 fattori, come 3 per 5 per 7 per 9, si potrebbero, secondo ciò che si è detto, disporre come si volessero i tre primi, o i tre ultimi, e far così passare per tutti i posti uno qualunque di questi fattori. Considerando dipoi una delle nuove disposizioni, per esempio la seguente 5 per per 7 per 3 per 9, si potrebbe invertire l'ordine dei due ultimi fattori, il che darebbe 5 per 7 per 9 per 3, e metterebbe 3 nell'ultimo posto. Si estenderanno senza pena questi ragionamenti a qualunque numero di fattori vorrassi.

71. Mediante la riduzione allo stesso denominatore, l'addizione, e la sottrazione delle frazioni s'effettuano come nel n.° 65.

72. Allorchè si hanno degl'interi accompagnati con delle frazioni, fa di mestieri in primo luogo operare sopra

quest'ultime. Affine di addizionare, per esempio, $3\frac{2}{7}$ con $5\frac{4}{9}$ cominceremo da ridurre al medesimo denominatore le frazioni $\frac{2}{7}$ e $\frac{4}{9}$, le quali diverranno $\frac{18}{63}$ e $\frac{28}{63}$ poi uniremo la loro somma a quella degl' interi 3 e 5; il totale sarà $8\frac{46}{63}$.

La sottrazione si opera parimente ogni qual volta la frazione, ch' entra nel numero da sottrarsi, sarà la più piccola delle due. Nel caso contrario, affine di rendere la sottrazione possibile, è necessario prender un imprestito sull' intero unito alla frazione più piccola. Se si dovesse, per esempio, togliere $\frac{4}{5}$ da $3\frac{1}{4}$, le due frazioni ridotte al medesimo denominatore divenendo $\frac{16}{20}$ e $\frac{5}{20}$ vedrebbesi che la prima non può esser tolta dalla seconda; ma prendendo in prestito 1, ovvero $\frac{20}{20}$ sull' intero 3, cangerebbe il numero $3\frac{1}{4}$, ossia $3\frac{5}{20}$, in $2\frac{25}{20}$, dal quale togliendo $\frac{16}{20}$ resterebbe $2\frac{9}{20}$.

73. Riprendo adesso l'esame della tavola del n. 55.

Moltiplicando Dividendo	il numeratore	si moltiplica si divide	la frazione.
Moltiplicando Dividendo	il denominatore	si divide si moltiplica	la frazione.

per dedurne delle nuove conseguenze;

Si fa manifesto primieramente dalla sola ispezione di questa tavola, che si può moltiplicare una frazione in due maniere, cioè: moltiplicando il suo numeratore, o dividendo il suo denominatore; e che possiamo parimente dividerla in due maniere, cioè, dividendo il suo numera-

tore, o moltiplicando il suo denominatore: dal che ne segue che la moltiplicazione sola, secondo che s'effettua sul numeratore, o sul denominatore, serve per eseguir la moltiplicazione, e la divisione delle frazioni per dei numeri interi, $\frac{3}{15}$ moltiplicati per 7 unità fanno $\frac{21}{15}$; $\frac{4}{9}$ divisi per 3, fanno $\frac{4}{27}$. ec.

74. Nel numero precedente il moltiplicatore essendo un numero intero, indicava ancora, come nel n.° 22, quante volte doveva ripetersi il moltiplicando; ma quando si dice, per esempio, che prendere il quinto d' un numero qualunque vuol dire moltiplicare questo numero per $\frac{1}{5}$, la parola *moltiplicare* non ha più il medesimo significato, che qui sopra; poichè dessa indica un risultato cinque volte minore del moltiplicando; nulladimeno si possono comprendere i due casi nel medesimo enunciato, dicendo, che *moltiplicare un numero per un altro vuol dire comporre col primo un numero nella stessa maniera che il secondo è composto coll' unità*. Difatto, allorchè si tratta di moltiplicare per 2, per 3, ec., il prodotto è composto di 2 volte, 3 volte, ec. il moltiplicando, nella stessa maniera che il moltiplicatore è composto di 2, 3, ec. unità; e moltiplicare un numero qualunque per la frazione $\frac{1}{5}$, per esempio, vuol dire prenderne la quinta parte, perchè il moltiplicatore $\frac{1}{5}$ essendo la quinta parte dell'unità, esprime che il prodotto dev'essere la quinta parte del moltiplicando. (*).

Parimente, moltiplicare un numero qualunque per $\frac{4}{5}$ vuol dire prender su questo moltiplicando una parte, che ne

(*) Siamo condotti a quest'enunciato da un problema, che si presenta sovente: quello, cioè dove si cerca il prezzo d'una porzione qualunque di una tal cosa allorchè si conosce il prezzo dell' unità di questa cosa. Il problema sesta evidentemente lo stesso, sia che si tratti d'una quantità maggiore, o minore di questa unità.

sia i quattro quinti, oppure eguale a quattro volte un quinto di questo moltiplicando.

Segue da ciò, che la parola *moltiplicare* estesa alle espressioni frazionarie non porta sempre seco la idea di aumento, come succede rispetto ai numeri interi. Ogni qual volta il moltiplicatore sarà minore dell'unità, il prodotto, sarà minore del moltiplicando, a cui sarebbe solamente eguale se il moltiplicatore fosse 1.

75. Poichè la *moltiplicazione per una frazione, qualunque sia il moltiplicando, ha per oggetto di prender su questo moltiplicando una parte indicata dalla frazione moltiplicatore*, quest'operazione è composta di due altre, cioè, d'una divisione, e d'una moltiplicazione, nelle quali il divisore, e il moltiplicatore son numeri interi.

Difatto, per prendere i $\frac{4}{5}$ d'un numero qualunque, per esempio, fa di mestieri primieramente trovarne la quinta parte dividendolo per 5, e ripetere questa quinta parte quattro volte, moltiplicandola per 4.

In generale, si fa manifesto che *bisognerà sempre dividere il moltiplicando pel denominatore della frazione moltiplicatore, e moltiplicare il resultato per il numeratore di questa frazione.*

Se il moltiplicando è un numero intero divisibile per 5, per esempio 35, la quinta parte sarà 7; moltiplicando questo resultato per 4, avremo 28 per i $\frac{4}{5}$ di 35, ossia pel prodotto di 35 per $\frac{4}{5}$. Se moltiplicando, sempre intero, non è divisibile esattamente per 5, che sia per esempio 32, la divisione per 5 darà per quoziente $6\frac{2}{5}$; ripetendo questo quoziente quattro volte avremo $24\frac{8}{5}$, lochè riducesi a $25\frac{3}{5}$ tal'è il valore di $\frac{4}{5}$ di 32.

Sarebbesi evitata la conversione di $24\frac{8}{5}$ in $25\frac{3}{5}$ se si fosse principiato da moltiplicare 32 pel numeratore 4; dividendo allora il prodotto 128 pel denominatore 5, sarebbesi immediatamente ottenuto l'ultimo resultato $24\frac{3}{5}$

76. Passo adesso alla moltiplicazione d'una frazione per un'altra frazione.

Suppongo che s'abbia di moltiplicare per esempio, $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{5}$: dietro al n.° precedente, l'operazione riducesi a dividere $\frac{2}{3}$ per 5, ed a moltiplicare in seguito il resultato per 4; e mediante la tavola del n.° 55, la prima operazione s'effettuerà moltiplicando il denominatore 3 del moltiplicando per 5, e la seconda, moltiplicando il numeratore 2 del moltiplicando per 4; il darà per il prodotto cercato $\frac{8}{15}$.

Sarebbe lo stesso di qualunque altro esempio; e dobbiamo in conseguenza concludere da ciò che precede, che, *per formare il prodotto di due frazioni, bisogna moltiplicare i numeratori l'uno per l'altro, e porre sotto questo prodotto quello dei due denominatori.*

77. Può succedere che s'abbiano da moltiplicare gli uni per gli altri degl'interi uniti a delle frazioni, come, per esempio, $3\frac{5}{7}$, $4\frac{8}{9}$. Il mezzo più semplice per ottenere il prodotto è di ridurre gl'interi in frazioni secondo il metodo del n.° 67; i due fattori saranno espressi in tal caso da $\frac{26}{7}$, $\frac{44}{9}$, il loro prodotto da $\frac{1144}{63}$, o da $18\frac{10}{63}$, estraendone gl'interi (66).

78. Si dà qualche volta al prodotto di più frazioni il nome di *frazione di frazione*; ed in questo senso appunto

si dice $\frac{2}{3}$ di $\frac{4}{5}$. Quest' espressione indica i $\frac{2}{3}$ della quantità rappresentata da $\frac{4}{5}$ dell' unità primitiva, e presa in questo caso per unità Ridunconsi queste due frazioni a una sola mediante la moltiplicazione (76), ed il resultato $\frac{8}{15}$ esprime il valore della quantità cercata in rapporto all' unità primitiva, e vale a dire che i $\frac{2}{3}$ della quantità rappresentata dai $\frac{4}{5}$ dell' unità equivalgono agli $\frac{8}{15}$ di quest' unità. Se si volessero prendere i $\frac{7}{9}$ di questo resultato, ciò ridurrebbesi a prendere i $\frac{7}{9}$ dei $\frac{2}{3}$ di $\frac{4}{5}$ e riducendo queste frazioni a una sola, avrebbesi $\frac{56}{135}$ pel valore della quantità cercata, riferito all' unità primitiva.

79. La parola *contenere* non conviene nulla di più, a tutto rigore, à differenti casi, che presenta la divisione, di quel che la parola *ripetere* convenga a quelli, che presenta la moltiplicazione; poichè non può dirsi, che il dividendo contenga il divisore allorchè quello è minor di quest' ultimo: tuttavia ci esprimiamo anco in questa maniera, ma solamente per analogia, e per maggiore estensione.

Ad oggetto di generalizzare la divisione, *bisogna riguardare il dividendo come composto rispetto al quoziente nella stessa maniera che il divisore è composto a riguardo dell' unità*; poichè il divisore, e il quoziente sono i due fattori del dividendo (36). Questa considerazione si presta a tutti i casi che possa offrire la divisione. Difatto, allorchè il divisore è 5, per esempio, il dividendo è eguale a 5 volte il quoziente, e quest' ultimo è per conseguenza la quinta parte del dividendo. Se il divisore è una frazione $\frac{1}{2}$ per esempio, il dividendo non debb' essere che la metà del quoziente, ovvero quest' ultimo debb' essere doppio dell' altro.

È manifesto che ogni qual volta il divisore sarà più piccolo dell'unità, il quoziente sorpasserà il dividendo, poichè questo divisore debb'essere contenuto nel dividendo un maggior numero di volte che l'unità, la quale, presa per divisore, dà in tutti i casi un quoziente espresso dallo stesso dividendo.

La definizione, che ho stabilita, conduce facilmente alla maniera d'operare quando il divisore è una frazione. Prendiamo, per esempio, $\frac{4}{5}$, in tal caso il dividendo debb'essere solamente i $\frac{4}{5}$ del quoziente; ma $\frac{1}{5}$ essendo $\frac{1}{4}$ di $\frac{4}{5}$, si avrebbe dunque $\frac{1}{5}$ del quoziente, prendendo il quarto del dividendo, o dividendolo per 4. Conoscendo così $\frac{1}{5}$ del quoziente, non resterebbe che prendere questo resultato 5 volte, ovvero moltiplicarlo per 5, onde ottenere il quoziente. In quest'operazione si divide il dividendo per 4, e si moltiplica il resultato per 5; è dunque (75) come se si fossero presi i $\frac{5}{4}$ del dividendo; o come se si fosse moltiplicato il dividendo per $\frac{4}{5}$, il che non è altro se non se la frazione divisore $\frac{5}{4}$, rovesciata.

Quest'esempio mostra che in generale, *affine di dividere un numero qualunque per una frazione, bisogna moltiplicarlo per questa frazione rovesciata.*

Sia per esempio 9 da dividersi per $\frac{3}{4}$; ciò si effettuerà moltiplicando 9 per $\frac{4}{3}$, e si troverà $\frac{36}{3}$ oppure 12. Parimente 13 da dividersi per $\frac{5}{7}$ sarà lo stesso che 13 moltiplicato per $\frac{7}{5}$, ovvero $\frac{91}{5}$. Il quoziente cercato sarà 18 $\frac{1}{5}$, estraendo gl'interi (66).

80. Quando il dividendo è una frazione, l'operazione si riduce *a moltiplicare* (76) *la frazione dividendo per la frazione divisore rovesciata.*

Sia $\frac{7}{8}$ da dividersi per $\frac{2}{3}$; bisognerà moltiplicare $\frac{7}{8}$ per $\frac{2}{3}$, il che darà $\frac{21}{16}$.

È manifesto che l'operazione suddivisata può ancora essere enunciata così: *affin di dividere una frazione per un' altra, bisogna moltiplicare il numeratore della prima per il denominatore della seconda, e il denominatore della prima per il numeratore della seconda.*

Se vi fossero degli interi uniti alla frazioni proposte, si ridurrebbero in frazioni, e si applicherebbe a' resultati la suddetta regola.

81. È importante l'osservare, che s'indica col mezzo di un'espression frazionaria una divisione qualunque, sia che dessa possa eseguirsi in numeri interi, o altrimenti: $\frac{36}{3}$, per esempio, esprimono evidentemente il quoziente di 36 per 3, del pari che 12; perchè $\frac{1}{3}$ essendo contenuto 3 volse nell'unità, $\frac{36}{3}$ saranno contenuti tre volte in 36 interi, come debb'esserlo il quoziente di 36 per 3.

82. Si osserverà senza dubbio, che la moltiplicazione, e la divisione delle frazioni si operano immediatamente col mezzo delle osservazioni esposte nella tavola del numero 55, laddove la somma, e la sottrazione delle frazioni richiedono una operazione preliminare. Ciò dipende da che le frazioni provengono dalla divisione, la quale dipende assai da vicino dalla moltiplicazione. Si avrà spesso occasione di convincersi in seguito di questa verità, che le operazioni da farsi sopra delle quantità sono tanto più facili, quanto più si approssimano all'origine di tali quantità.

DELLE FRAZIONI DECIMALI.

82. Benchè si possono, col mezzo delle regole precedenti, effettuare in tutti i casi sulle frazioni le quattro operazioni fondamentali dell' Aritmetica, si è dovuto conoscere sin da principio che, se si fossero assoggettate ad una medesima legge di decremento le diverse soddivisioni dell' unità, le quali s' impiegano per misurare le quantità minori di questa unità, il calcolo delle frazioni sarebbe divenuto molto più comodo, atteso la facilità, che sarebbesi avuta per convertir l' une nell' altre. Prendendo questa legge conforme alla base del nostro sistema di numerazione, si è dato al calcolo il massimo grado di semplicità, a cui era possibile pervenire; ed ecco in qual maniera.

Si è veduto nel n. 3., che ciascuna delle collezioni d' unità, contenute in un numero, si compone di dieci unità dell' ordine precedente, come la diecina si forma dalle unità semplici; ma niente osta che si riguardi quest' unità semplici come contenente dieci parti di cui ciascuna sarà un *decimo*;

Il decimo, come contenente dieci parti, di cui ciascuna sarà un *centesimo* dell' unità;

Il centesimo, come contenente dieci parti, di cui ciascuna sarà un *millesimo* dell' unità e così di seguito.

Procedendo di tal maniera, si formeranno delle quantità tanto piccole quanto si vorrà per delle quali si potranno in conseguenza misurar delle quantità per quanto piccole esse sieno.

Queste frazioni, che si chiamano *decimali*, perchè desse sono composte di parti nell' unità di dieci in dieci volte minori, si convertono l' une nell' altre nella stessa maniera che le *diecine*, le *centinaja*, le *migliaja*, ec. si convertono in unità. Difatto.

l'unità valendo a	10 decimi
il decimo	10 centesimi
il centesmo	10 millesimi

ne resulta che il decimo equivale a 10 volte 10 millesimi ovvero 100 millesimi.

Per esempio, 2 decimi, 3 centesimi, e 4 millesimi saranno equivalenti a 234 millesimi; come 2 centinaja, 3 diecine, e 4 unità fanno 234 unità: sarà lo stesso in qualunque altro caso, poichè la subordinazione delle parti dell' unità è simile a quelle dei diversi ordini d' unità.

84. In virtù di quest' osservazione si può, col mezzo delle cifre, scrivere le frazioni decimali nello stesso modo dei numeri interi; poichè dietro alla convenzione, la quale rende dieci volte minori il valor d' una cifra posta alla destra d' un altra, i decimi trovano naturalmente il lor posto alla destra delle unità, poi i *centesimi* alla destra dei decimi, e così di seguito; ma, per impedire che non si possano confonder le cifre ch' esprimono delle parti decimali, con quelle, che rappresentano delle unità intere, si pone una virgola alla destra delle unità. Affine d' esprimere, per esempio, 34 unità, e 27 centesimi, scriveremo 34, 27. Se non vi fossero le unità, se ne riempirebbe il posto con uno zero, e si farebbe lo stesso per tutte le parti decimali, che potesser mancare tra quelle che sono enunciate nel numero proposto.

Così	19 centesimi	si scrivono	0,19
	304 millesimi		0,304
	3 millesimi		0,003

85. Se si paragonano l' espressioni delle frazioni decimali di qui sopra colle seguenti $\frac{19}{100}$, $\frac{304}{2000}$, $\frac{3}{1000}$, le quali si ricaverebbero dalla maniera di rappresentare, in generale una frazione, vedremo, che *per rappresentare sotto la forma intera una frazion decimale scritta come una frazione ordinaria, fa di mestieri prendere tale com' esso è il numeratore di questa frazione, e scriverlo in modo che ab-*

bia dopo la virgola tante cifre, quanti zeri vi sono alla destra dell' unità nel denominatore.

Reciprocamente, *per ridurre una frazion decimale, scritta sotto la forma d' un intero, a quella d' una frazione ordinaria, bisogna dare per denominatore alle cifre, ch' essa contiene, l' unità seguita da tanti zeri, quante cifre vi sono alla destra della virgola.*

In tal maniera le frazioni 0, 56, e 0, 036 si cangiano in $\frac{56}{100}$, e $\frac{36}{1000}$.

86. *L' espressione in cifre dei numeri contenenti delle parti decimali, si legge enunciando prima le cifre poste alla sinistra della virgola, poi quelle che sono alla destra, aggiungendo all' ultima di queste la denominazione delle parti che dessa rappresenta.*

Il numero 26, 736 si enuncia 26 unità e 736 millesimi:

Il numero 0, 0637 si enuncia 673 dieci-millesimi:

Finalmente 0, 0000673 si enuncia 763 dieci-millionesimi.

87. Le cifre decimali non assumendo il loro valore che dal posto ch' esse occupano per rapporto alla virgola, è indifferente di scrivere, ovvero di cancellare sulla lor destra un tal numero di zeri che si vorrà. Per esempio 0, 5 è la stessa cosa che 0, 50; 0, 784 la medesima cosa che 0, 78400: poichè nel primo caso il numero che esprime la frazion decimale, è divenuto dieci volte maggiore, ma le parti son divenute centesimi, e in conseguenza dieci volte minori di quel che desse non erano in principio; nel secondo caso il numero, che esprime la frazione, è divenuto cento volte maggiore, ma le parti essendo divenute centomillesimi, son cento volte più piccole di quel che desse non erano sul principio: questa trasformazione riducesi dunque a quella, che s' opera sopra una frazione ordinaria allorchè si moltiplicano i suoi due ter-

mini per un medesimo numero; e sarebbe lo stesso che dividerli per un medesimo numero, se si sopprimessero dagli zeri.

88. L'addizione delle frazioni decimali, e dei numeri, che le accompagnano, non dimanda altra regola che quella dei numeri interi, poichè le parti decimali si compongono l'uno dell'altre, andando dalla destra alla sinistra, nella stessa maniera che le unità intere.

Sian, per esempio, 0, 56; 0, 003; 0, 958, disponendole come segue:

	0,56
	0,003
	0,958
Somma . . .	1,521

trovasi mediante la regola del n. 12, che la loro somma è 1, 521.

Siano ancora i numeri 19, 35; 0, 3; 84, 5, e 110, 02; i quali contengono anco delle unità intere: si disporranno nel modo seguente:

	19,35
	0,3
	84,5
	110,02
Somma . . .	214,17

e si troverà nel medesimo modo che la loro somma è 214, 17.

In generale, *l'addizione dei numeri decimali si fa come quelle dei numeri interi, osservando di porre alla somma la virgola nella medesima colonna ove si trovano tutte quelle dei numeri da addizionarsi.*

89. Le regole prescritte per la sottrazione dei numeri interi convengono ancora, come vedremo, ai numeri decimali. Sia, per esempio 0, 3697 da togliersi da 0, 62: osserveremo primieramente che il secondo numero, il quale non contiene che de centesimi, laddove che il primo non contiene de' dieci-millesimi, può anch' esso essere convertito in dieci-millesimi, ponendo due zeri alla sua destra (87), il che lo cangia in 0, 6200. Disporremo in seguito l' operazione nel modo che segue:

	0,6200
	0,3697
Differenza	0,2503

e col mezzo della regola del numero 17, troveremo una differenza di 0,2503.

Sia ancora il numero 7, 364 da togliersi da 9, 1457: l' operazione essendo disposta come si vede qui sotto:

	9,1457
	7,3640
Differenza . . .	1,7817

si trova la differenza soprassegnata. Sarebbe stato lo stesso che non metter lo zero alla destra del numero da togliersi, purchè si fossero poste le sue diverse cifre al disotto di quelle che indicano nel primo numero, degli ordini d' unità o delle parti corrispondenti.

In generale, *la sottrazione dei numeri decimali si esegue come quella dei numeri interi, purchè si renda il numero delle cifre decimali lo stesso nei due numeri proposti, scrivendo alla destra di quel, che n' ha meno, tanti zeri, quanti ne son necessarj; e si pone alla differenza una virgola nella colonna dove si trovano quelle dei numeri proposti.*

Le prove dell'addizione, e della sottrazione dei numeri

decimali si fanno assolutamente come quelle delle medesime operazioni sopra i numeri interi.

90. Poichè la virgola separa le collezioni di unità intere dalle parti decimali, il suo spostamento cangia necessariamente il valore del numero totale. Retrocedendola verso la destra, si fanno passare nella parte intera delle cifre, le quali si trovavano nella parte frazionaria; si aumenta per conseguenza il valor totale del numero proposto. Al contrario, facendo avanzare la virgola verso la sinistra, si fanno passar nella parte frazionaria delle cifre, che si trovavano nella parte intera, ed in conseguenza si diminuisce il valor totale del proposto numero.

Il primo cangiamento rende il numero proposto dieci, cento, mille, ec. volte maggiore, secondo che si fa retrocedere la virgola di uno, di due, di tre posti verso la destra; perchè ogni qualvolta la virgola retrocede così d'un posto, tutte le cifre, paragonate al posto di questa virgola, avanzando d'un posto verso la sinistra, prendono in conseguenza un valore dieci volte maggior di quello, che desse avevano in sul principio.

Se, per esempio, nel numero 134, 28 si porti la virgola tra 2 ed 8, avremo 1342, 8; le centinaja saranno divenute migliaja, le diecine centinaja, le unità diecine, i decimi unità, ed i centesimi decimi. Tutte le parti del numero essendo divenute dieci volte maggiori, è lo stesso come se desso si fosse declupato, ovvero moltiplicato per dieci.

Il secondo cangiamento rende il numero proposto dieci, cento, mille, ec. volte minore, secondo che si fa avanzare la virgola di uno, due, tre ordini o gradi posti verso la sinistra, poichè ogni volta che si avanza così la virgola di un posto, tutte le cifre paragonate al posto di questa virgola rinculano di un posto verso la dritta, e prendano in conseguenza un valore dieci volte minor di quello, ch'esse aveano in principio.

Se nel numero 144, 28 si porta la virgola tra il 3, ed

il 4, avremo 13, 428; le centinaja saranno divenute diecine, le diecine unità, le unità decimi, i decimi centesimi, i centesimi millesimi. Tutte le parti del numero essendo divenute dieci volte minori, è lo stesso come se si prendesse il decimo, oppure che si fosse diviso per dieci.

91. E facile prevedere, dietro alle considerazioni antecedenti, il vantaggio che le frazioni decimali hanno sulle frazioni ordinarie; tutte le moltiplicazioni, o divisioni che bisogna effettuare con il denominatore di quest' ultime, s' effettuano nelle altre coll' aggiungere, sopprimere un certo numero di zeri, oppure mediante il semplice spostamento della virgola. Adattando queste modificazioni alla teoria delle frazioni ordinarie, se ne deduce prontamente quella delle frazioni decimali e della maniera di effettuare la moltiplicazione, e la divisione sopra queste frazioni; ma possiamo arrivarci direttamente col mezzo delle considerazioni seguenti.

Supporrò primieramente che il moltiplicando solo abbia delle cifre decimali. Se facciasi astrazione della virgola, desso diventerà dieci, cento, mille, ec. volte maggiore, secondo il numero delle sue cifre decimali; ed il prodotto, che in questo caso darà la moltiplicazione, sarà un egual numero di volte maggiore di quello che si cercava; otterremo dunque quest' ultimo col dividere l' altro per dieci, cento, mille, ec.; il che s' effettuirà separando sulla destra (96) tante cifre decimali, quante ve n' erano nel moltiplicando.

Se, per esempio, s' avesse da moltiplicare 34,137 per 9, formerebbesi primieramente il prodotto di 34137 per 9, il che darebbe 307233; e siccome la soppressione della virgola avrebbe reso il moltiplicando mille volte maggiore di quel che desso non era, bisognerebbe dividere per mille il prodotto trovato, o sivvero separare con una virgola le sue tre ultime cifre a destra: avrebbesi in tal maniera 307,233.

In generale, *affin di moltiplicare per un numero intero un numero accompagnato da cifre decimali, si fa astra-*

zione dalla virgola in quest' ultimo, ma si separano sulla destra del prodotto tante cifre decimali, quante ne conteneva il moltiplicando.

92. Allorchè il moltiplicatore contiene delle cifre decimali, e che si fa astrazione dalla virgola, si rende questo dieci, cento, mille, ec. volte maggiore, secondo il numero delle sue cifre decimali: impiegandolo in questo stato, esso darà evidentemente un prodotto dieci, cento, mille, ec. volte maggiore di quello che sarebbesi dovuto avere, ed in conseguenza questo si otterrà col dividere il primo per uno di questi numeri, cioè a dire, separando sulla destra tante cifre decimali quante ne conteneva il moltiplicatore, oppure facendo avanzare d' un egual numero di posti, verso la sinistra (90), la virgola che troverebbesi nel prodotto, se il moltiplicando avesse pure dei decimali.

Sia per esempio 172, 84 da moltiplicarsi per 36,003; facendo astrazione dalla virgola del moltiplicatore solamente, avrebbesi, dietro al numero precedente, il prodotto 6222758, 52; ma il moltiplicatore trovandosi mille volte maggiore di quel che avrebbe dovuto essere, bisognerà dividere questo prodotto per mille, oppure fare avanzare la virgola di tre posti verso la sinistra; il che darà 6222,75852 pel prodotto cercato, nel quale si troveranno per conseguenza tante cifre decimali, quante insieme ve ne sono, tanto nel moltiplicando che nel moltiplicatore.

In generale, *per moltiplicare l' uno per l' altro due numeri accompagnati da cifre decimali, faremo astrazione dalle virgole nell' uno e nell' altro: ma separeremo sulla destra del prodotto tante cifre decimali, quante ne contengono ambedue.*

In certi casi bisogna porre uno, o più zeri sulla sinistra del prodotto, per dare al medesimo il numero delle cifre decimali che desso deve avere secondo la regola precedente. Se si avesse per esempio 0, 624 da moltiplicare per 0, 003, formando primieramente il prodotto di 624 per 3,

avrebbesi il numero 1872, il quale non contiene che quattro cifre; e siccome bisognerebbe separare 6 cifre decimali, ciò non potrebbe farsi che ponendo alla sinistra di questo numero tre zeri, uno dei quali terrebbe il posto delle unità; il che farebbe 0, 001872.

93. È evidente (47) che il quoziente di due numeri non dipende dalla grandezza assoluta delle loro unità, purchè questa sia la medesima nell' uno, e nell' altro. Se si trattasse dunque di dividere 451, 49 per 13, osserverebbesi che il primo riducesi a 45149 centesimi, ed il secondo a 1300 centesimi, e questi ultimi numeri debbono dare lo stesso quoziente come se i medesimi esprimessero delle unità intere. Saremmo così condotti a sopprimere la virgola nel primo dei numeri proposti, ed a porre due zeri alla destra del secondo; ed allora non dovrebbe farsi altro che dividere il numero 45149 per 1300, il che darebbe per quoziente $34\frac{949}{1300}$.

Concluderemo da ciò che, *affin di dividere per un numero intero, un numero accompagnato da cifre decimali, bisogna sopprimer la virgola in quest' ultimo, porre alla destra dell' altro tanti zeri, quante cifre decimali contiene questo dividendo, e non si dovrà fare alcun cangiamento nel quoziente.*

94. Allorchè il dividendo, ed il divisore sono ambedue accompagnati da cifre decimali, si deve, prima di sopprimer la virgola, porre alla destra di quello de' due numeri che ha meno cifre decimali, tanti zeri quanti abbisognano perchè desso termini al medesimo ordine di decimali che l' altro. I due numeri proposti essendo allora portati alle medesime parti dell' unità, daranno il medesimo quoziente che darebbero se desse esprimessero unità intere.

Sia, per esempio, 315, 432 da dividersi per 23, 4; cangeremo quest' ultimo numero in 23, 400, e divideremo in seguito 315432 per 23400: il quoziente sarà $13\frac{11232}{23400}$.

Quindi, *affin di dividere l'uno per l'altro due numeri accompagnati da cifre decimali, si pongono alla destra di quello che ne ha meno tanti zeri, quanti ne son necessarj perchè il numero delle cifre decimali sia lo stesso nel dividendo, e nel divisore; si fa allora astrazione dalla virgola, e non si deve fare cangiamento alcuno nel quoziente.*

95. Siccome non si ricorre ai decimali che per evitar l'impiego delle frazioni ordinarie, è naturale servirsene per approssimare i quozienti che non si possono esattamente ottenere; il che si fa convertendo in decimi, centesimi, millesimi ec. il resto, affine ch'esso possa contenere il divisore, come si vede nell'esempio seguente.

	45149	1300
	6149	34,73
Resto	949	
Decimi. . . .	9490	
Centesimi . . .	3900	
	0000	

Allorchè siam pervenuti al resto 949, vi si aggiunge uno zero, affine di moltiplicarlo per dieci, ossia convertirlo in decimi; formasi allora un nuovo dividendo parziale composto di 9490 decimi, e dà per quoziente 7 decimi; i quali si scrivono alla destra delle unità dopo d'avere interposta una virgola. Restano ancora 390 decimi, i quali si riducono in centesimi mediante l'aggiunta d'un nuovo zero, il che forma un secondo dividendo composto di 3900 centesimi; si ottiene per quoziente 3 centesimi, i quali pongonsi alla destra dei decimi. L'operazione rimane così terminata, ed abbiamo per resultato esatto 34, 73 centesimi. Se questa operazione avesse lasciato un terzo resto, si sarebbe spinta più oltre convertendo questo resto in

millesimi, e continuando sempre della stessa maniera fino a tanto che non si fosse pervenuto a un quoziente esatto, oppure ad un resto composto di parti tante piccole, che si potessero riguardare come di niuna importanza.

È manifesto che bisogna sempre, come nell' esempio suddivisato, porre una virgola dopo delle unità intere del quoziente, per distinguerle dalle cifre decimali, il cui numero debb' essere eguale a quello degli zeri scritti successivamente alla destra dei resti (*).

96. Il numeratore d' una frazione essendo convertito in parti decime, potrà dividersi pel denominatore, come nell' esempio precedente, e con questo mezzo la frazione sarà convertita in decimali. Sia, per esempio, la frazione $\frac{1}{8}$; opereremo nel modo seguente.

1	8
10	0,125
20	
40	

Sia altresì la frazione $\frac{4}{707}$; bisogna primieramente con-

(*) L' operazione, che abbiamo effettuata sopra i decimali, non è che un caso particolare di quest' altra più generale: *Valutare un quoziente di una divisione in frazione di una specie data*: e per eseguirla, convertesi il dividendo in frazione della medesima specie, moltiplicandolo per il denominatore dato. Così, per valutare in quindicesimi il quoziente di 7 per 3 si moltiplicherà 7 per 15, e divideremo il prodotto 105 per 3; avremo 35 quindicesimi, ovvero $\frac{35}{15}$ pel dimandato quoziente.

vertire il numeratore in millesimi prima di poter principiare la divisione scritta qui sotto.

4	797	(*)
4000	0,005018	
1500		
7030		
654		

97. Per quanto spingasi lungi quest' ultima divisione, non conseguiremo giammai un quoziente esatto, perchè la frazione $\frac{4}{797}$ non può, come la frazione $\frac{1}{8}$, esprimesi rigorosamente col mezzo dei decimali.

Questa differenza dipende da cio che il denominatore della frazione, il qual non divide il suo numeratore, non può dare un quoziente esatto se non che quando esso divide uno dei numeri 10, 100, 1000, ec. pei quali si moltiplica successivamente il suo numeratore; poichè egli è un principio, che troveremo dimostrato nell' Algebra, che un numero non può dividere un prodotto se non che quando i suoi fattori primi dividono quelli di questo prodotto. Ora i numeri 10, 100, 1000, ec. essendo tutti

(*) Possiam pure proporci di convertire una frazione data in frazione di un'altra specie, ma minore della prima, di trasformar per per esempio, $\frac{3}{4}$ in diciassettesimi; arriveremo a ciò moltiplicando 3 per 17, e dividendo il prodotto per 4. Troveremo in questa maniera $\frac{51}{4}$ di diciassettesimo, oppure $\frac{12}{17}$, e $\frac{3}{4}$ d'un diciassettesimo: ora $\frac{3}{4}$ di $\frac{1}{17}$ equivalgono a $\frac{3}{68}$: il resultato $\frac{13}{17}$ è dunque vicino al vero di $\frac{3}{68}$ a un dipresso.

formati dal numero 10, i cui fattori primi sono 2, e 5, essi non sono divisibili che per i numeri formati da questi fattori medesimi; 8 è in questo caso, poichè resulta da 2 per 2 per 2.

Le frazioni, le quali non possono valutarsi rigorosamente per mezzo dei decimali, offrono nella loro espressione approssimata, allorchè questa si spinge bastantemente lontano, un carattere, che serve a farle trovare; questo è il ritorno periodico delle medesime cifre.

Se si converte in decimali la frazione $\frac{12}{37}$, troveremo 0, 324324 . . . . . , e le cifre 3, 2, 4 ritorneranno sempre nel medesmo ordine, senza che l'operazione possa mai terminarsi.

Difatto, siccome non può aversi per resto in ciascuna divisione che uno dei numeri interi che precedono il divisore, bisogna necessariamente che, quando si saranno fatte più divisioni di quanti sono questi numeri, ricadasi sopra qualcuno dei resti precedenti, e che in conseguenza i dividendi parziali ritornino nello stess' ordine. Nell' esempio suddivisato tre divisioni bastano per arrivare a questo ritorno; ma ne bisognerebbero sei per la frazione $\frac{1}{7}$, perchè si troverebbero allora per resti i sei numeri che sono al disotto di 7, ed otterrebbesi 0, 142857 1.... La frazione $\frac{1}{3}$ conduce solamente a 0, 3333 . . . . . .

98. Le frazioni le quali hanno per denominatore un numero qualunque di 9, non hanno nel loro periodo se non che la cifra significativa 1:

$\frac{1}{9}$ somministra 0,1111 . . . . . .

$\frac{1}{99}$ . . . . . 0,10101 . . . . . .

$\frac{1}{999}$ . . . . . 0,001001001 . . . . . .

e così dell' altre; poichè ciascuna delle divisioni parziali, effettuandosi sopra i numeri 10, 100, 1000, ec., lascia sempre per resto l' unità.

Profittando di quest' osservazione, si passa facilmente da una frazione decimale periodica alla frazione ordinaria, da cui essa deriva. Si fa manifesto, per esempio, che 0, 33333 . . . . . riducesi alla frazione 0, 11111 . . . . moltiplicata per 3; e siccome quest' ultima è lo sviluppo di $\frac{1}{9}$, se ne conclude, che la prima è quello di $\frac{1}{9}$, moltiplicato per 3, oppure di $\frac{3}{9}$, ovvero finalmente di $\frac{1}{3}$.

Quando trattasi di frazioni, il cui periodo è composto di due cifre, si paragonano queste allo sviluppo di $\frac{1}{99}$; a quello di $\frac{1}{999}$ allorchè il loro periodo contien tre cifre; e così di seguito.

Sia, per esempio, 0, 324324 . . . . , è manifesto che questa frazione si formerebbe moltiplicando 0, 001001. . . . pel numero 324: moltiplicando dunque $\frac{1}{999}$, di cui quest' ultima frazione è lo sviluppo, pel numero 324, avremo $\frac{324}{999}$ per la prima; e dividendo i due termini di questo resultato per 27, cadremo sulla frazione $\frac{12}{37}$.

In generale, *la frazione ordinaria, dalla quale resulta una frazione decimale periodica, si forma scrivendo come denominatore sotto il numero ch' esprime un periodo, tanti* 9 *quante cifre vi sono in questo periodo.*

Se il periodo della frazione non cominciasse alla prima cifra decimale, potrebbesi trasportare, per un istante, la virgola immediatamente avanti la sua prima cifra, e valutar la frazione a partirsi da questa cifra, solamente considerando come delle unità quelle che sono alla sini-

stra: altro non dovrebbesi fare in seguito che dividere il resultato per 10, 100, 1000, ec. secondo il numero dei posti de' quali si farà rinculata la virgola verso la destra.

La frazione 0, 324141 ...., per esempio, la scriveremo in primo luogo così 32, 4141 .....: la parte 0, 4141 .... corrispondendo a $\frac{41}{99}$, avremo il resultato 32 $\frac{41}{99}$, il quale bisognerà divider per 100, poichè la virgola è stata traslocata di due passi verso la destra; ed otterremo per conseguenza $\frac{32}{100}$, e $\frac{41}{9900}$ oppure, riducendo al medesimo denominatore $\frac{3209}{9900}$; frazione la quale riprodurrebbe lo sviluppo proposto.

Per formarsi un' idea ben chiara della natura di queste espressioni, basta di considerar la frazione 0, 999 ..... Cercando di risalire al suo valor primitivo, si trova che dessa corrisponde a 9 diviso per 9; il che non è altra cosa che l' unità: frattanto, qualunque sia il numero delle cifre, al qual ci arrestiamo nella sua espressione, non formeremo giammai l' unità. Se ci limitiamo alla prima, avremo bisogno di $\frac{1}{10}$, alla seconda di $\frac{1}{100}$, alla terza di $\frac{1}{1000}$, e così di seguito; di maniera che possiamo avvicinarci all' unità tanto quanto vorremo, ma senza mai giungervi. L' unità non è dunque quì che un *limite*, al quale l' espressione 0,999 .... si approssima tanto più, quanto più cifre vi s' inseriscono.

99. Ciò che precede contiene le regole veramente essenziali dell' aritmetica dei numeri astratti; ma, per applicarle agli usi della società, fa di mestieri conoscere le diverse unità di cui ci serviamo per paragonarle tra loro, o valutare le quantità, sotto qualunque forma, che desse si presentino. Queste unità, le quali sono le *misure* in uso, hanno variato coi tempi, e coi luoghi; il loro concatenamento non si è formato che a poco a poco, secondo che il bisogno, ed i progressi delle arti, e delle

scienze hanno obbligato a porre maggiore esattezza nella valutazione delle materie e nella costruzione degl'istrumenti.

Dopo d'aver provati per lungo tempo gl' inconvenienti d'un sistema composto di parti incoerenti, ed il cui difetto di legame poneva nei calcoli una complicazione inutile, e nel medesimo tempo nocevole all'istruzion generale, i più illustri dotti francesi hanno finalmente ottenuto lo stabilimento delle nuove misure legate tra loro, assoggettate all'andamento del sistema di numerazione, prese immediatamente sulle dimensioni del globo che noi abitiamo, e sulla più comune delle distanze, che esso presentaci. L'estensione di questo Trattato, ed il posto che occupa nell'istruzione, non mi permettono di presentare l'estratto di tutti i lavori scientifici eseguiti per lo stabilimento di questo sistema, e che fanno il più bel monumento elevato alla gloria delle scienze, ed all'utilità pubblica nel passato secolo: io mi limiterò soltanto ad esporne sommariamente i principj, e l'uso.

ESPOSIZIONE

DEL NUOVO SISTEMA METRICO, ED APPLICAZIONI USUALI DELL' ARITMETICA.

100. Le misure prendono delle forme, e dei nomi differenti, secondo la specie delle grandezze alla quale si applicano. Queste grandezze possono esser classificate, nella maniera seguente.

Le lunghezze, dalle quali nascono le misure lineari;

Le superficie, o sivvero le aree;

I volumi, oppure le capacità, mediante le quali si paragonan tra loro i corpi, tanto solidi, che liquidi.

Finalmente le gravità, o sivvero i pesi, i quali servono pure al paragone dei corpi.

L' unità di lunghezza, ossia l' unità lineare si chiama *metro*.

L' unità di superficie *ara*;

L' unità di volume *stero o metro cubo* (*);

L' unità di capacità *litro*;

L unità di peso *grammo*.

Per comporre delle misure maggiori e minori delle precedenti, ci serviamo delle parole *miria*, *chilio*, *ecato*, *deca*, *deci*; *centi*, *milli*, ec. ricavate dal Greco, e dal Latino, e che indicano respettivamente delle diecine di migliaja, delle centinaja, delle diecine, dei decimi, dei centesimi, dei millesimi, ec. Le misure di lunghezza forman dunque la serie seguente: *miriametro*, *chiliometro*, *ecatometro*, *decametro*, *METRO*, *decimetro*, *centimetro*, *millimetro*, ec.

Ciascuna di queste misure è dieci volte maggiore di quella, che la segue, e dieci volte minore di quella, che la precede immediatamente nell' ordine della serie.

Il *litro* è una misura di capacità; la sua continenza equivale al decimetro cubo.

I nomi delle misure di capacità si compongono come quelli delle misure di lunghezza; così diremo *ecatolitro*, *decalitro*, *litro*, *decilitro*, *centilitro*, ec.

Il *grammo* è un peso eguale al peso d' un centimetro cubo d' acqua pura (**). Il *miriagrammo*, il *chiliogram-*

(*) Si chiama *cubo* un corpo terminato da sei faccie quadrate, ed eguali.

(**) Per ottenere maggior esattezza nella determinazione di quest' unità, si è fatto uso dell' acqua distillata, la quale è stata ridotta al suo *maximum* di densità, mediante un convenevole raffreddamento.

mo, l'*ecatogrammo*, il *decagrammo*, il *grammo*, il *decigrammo*, il *centigrammo*, ec. formano una serie decimale, nello stesso modo che le altre misure.

L'*ara* è una misura di superficie, eguale al decametro quadrato, vale a dire, a un quadrato, il cui lato fosse un decametro, ovvero ancora a cento metri quadrati. Non vi sono che due misure multiplici dell'ara, le quali sembrano avere qualche utiltà, una è l'*ecatara*, la quale equivale a cento are: l'altra è la *miriara*, che vale diecimila.

Lo *stero*, per il legname da ardere è un metro cubo, il quale suppone dei pezzi da catasta della lunghezza d'un metro posti dentro un telajo quadrato di un metro per lato, ovvero con qualunque altra disposizione equivalente. I composti dello stero non sembrano dover servire agli usi ordinarj.

Finalmente le unità di moneta son conosciute adesso sotto il nome di *franco*, di *decimo*, di *centesimo*. I loro valori relativi sono egualmente di dieci in dieci volte minori.

Il franco è stato formato sopra pezzo d'argento del peso di 5 grammi, colla *lega* di $\frac{1}{10}$ di rame (*).

La *Tavola* qui unita è adattatissima per far conoscere i vantaggi dell'uniformità introdotta nella nomenclatura dei

(*) Un carattere essenziale, che assicura a questo sistema la superiorità sopra tutti quelli, che sono stati inventati in questo genere, si è che tutte le misure son collegate tra loro, ed hanno un rapporto immediato colle stesse dimensioni dello Sferoide terrestre. Il metro è la diecimillionesima parte della distanza del polo all'equatore, contata sul meridiano, che passa per Parigi. L'arco di questo meridiano, il quale traversa la Francia, essendo stato misurato con un'esattezza incognita fino al presente, e calcolato colla maggior precisione mediante i metodi del Signore Delambre, n'è stata conclusa la distanza che si trova tra il polo, e l'equatore dietro alla quale si è stabilito il metro,

(pag.

DECIMALI

OMINAZIONE.

PALI		ESEMPJ DEI NOMI COMPOSTI per esprimere differenti unità di Misure.
GRARIA.	PER LE LEGNA da ardere.	
RA (ar.)	STERO (st.)	MIRIAMETRO, lunghezza di diecimila metri. CHILIOGRAMMO, peso di mille grammi. ECATARA, misura agraria di cento are. DECALITRO, misura di capacità di dieci litri. DECIMETRO, decima parte del metro. CENTIGRAMMO, centesima parte del grammo. ——— *Nota.* Molti composti, come *decara*, *chilioara*, e tutti quelli, che son formati con lo *stero*, non sono in uso.
Centimetri quadri.	Un metro cubo.	L'unità monetaria si chiama FRANCO. Il Franco dividesi in dieci DECIMI. Ed il Decimo in dieci CENTESIMI. Il valore d' un Franco è quello d' un pezzo d'argento a nove decimi di fino, pesante cinque grammi.

Digitized by Google

multipli, e delle suddivisioni delle misure prese per unità. Allato di ciascun nome si trova, tra parentesi, il compendio proposto dal Sig. Dillon, già verificatore generale dei pesi, e misure.

101. Tutte le questioni, nelle quali si tratta di riunire in un solo più numeri d'una medesima specie di misure, si riportano evidentemente all'addizione.

Così, per sapere ciò che hanno prodotto tre contratti, ne' quali si è venduto successivamente per 1334fr., 45; 1951fr., 17; 183fr., 11 d'una certa derrata, serve addizionare i tre numeri suddivisati, e la risposta alla questione proposta si troverà nel totale 3468fr., 73.

Suppongo ancora che siansi comprate quattro pezze di stoffa, le cui lunghezze siane espresse da 217mi, 43; 97mi, 21; 194mi, 07; 51mi, 34: la somma di questi numeri espressa da 560mi, 05, darà la quantità totale della stoffa.

L'applicazione della sottrazione è troppo facile per trattenermivi.

102. È manifesto che mediante il soccorso della moltiplicazione si trova il valore d'un numero dato di cose della medesima specie, e dello stesso valore, subitochè si conosce quest'ultimo; poichè trattasi allora di ripeterlo tante volte quante sono le cose, qualunque siano queste cose.

Si vede, che il prodotto non dipende dalla specie delle unità del moltiplicatore, ma che desso è della specie del moltiplicando, e che il moltiplicatore debb'esser considerato come un numero astratto. Questa considerazione serve a determinare in una moltiplicazione di numeri concreti quello, che si deve prendere per moltiplicatore.

Se, per esempio, il metro d'una certa stoffa costa 19fr., 25, e che se ne dimandi il prezzo di una pezza

contenute 37mi, 14 servirà di moltiplicare 19fr., 25 per 37, 14; il prodotto 714fr., 95 sarà il prezzo dimandato.

Difatto è manifasto, che il prezzo della pezza dev' essere composto, mediante quello del metro, nella maniera medesima che la lunghezza di questa pezza è composta riguardo al metro, Così, la pezza, che contiene 37 volte il metro più $\frac{14}{100}$ di questa misura, deve costare 37 volte 19fr., 25 più $\frac{14}{100}$ di questo prezzo; fa dunque mestieri moltiplicare 19fr., 25 per 37 e $\frac{14}{100}$, e queste due operazioni son riunite in una sola allorchè si prende 35, 14 per moltiplicatore.

Possiamo ancor concepire l'operazione sotto questo semplicissimo punto di vista: risguardando primieramente la somma di 19fr., 25 come il prezzo d'un centimetro di stoffa, vale a dire, dell'unità dell'ultim'ordine del moltiplicatore, diviene evidente, che il prezzo totale debbe ottenersi ripetendo 3714 volte la somma di 19fr., 25; ma oltracciò 3714 essendo un numero cento volte maggiore del vero moltiplicatore 37, 14, ridurremo il prodotto al suo giusto valore prendendone la centesima parte, oppur separando due cifre decimali di più.

Finalmente, in terzo luogo, riconoscesi senza pena che il prezzo del metro essendo di 19fr., 25, quello dell'unità dell'ultim'ordine del moltiplicatore; ossia dei centimetro, nell'esempio attuale, che deve esserne la centesima parte, sarà espresso da 0fr. 1925, ed avremo il prezzo di 37mi, 14, ovvero 3714 centimetri, moltiplicando 0fr., 1925 per 3714.

103. Questa maniera di considerare il problema s'appoggia alla facilità di convertire l'une nell'altre le suddivisioni d'una medesima specie di misure, mediante il semplice cangiamento di posto della virgola, secondo le osservazioni del num.o 90. Se si volessero, per esempio, con-

vertire 314me, 513 in decimetri, servirebbe far retrocedere la virgola d'un passo verso la destra, il che darebbe 3145decim., 13; poichè allora si prenderebbe il decimetro per unità.

Sopprimendo la virgola, i millimetri divengono unità, ed abbiamo in conseguenza il numero dei millimetri contenuti nella grandezza proposta espresso da 314513mi.

104. Ritornerebbesi da quest' ultima suddivisione a quelle, che ad essa precedono, e vale a dire al centimetro, al decimetro, al metro, separando successivamente una, due, o tre decimali. Mentre separandone quattro, prenderebbesi il decametro per l'unità, ed avrebbesi 31 Dmi, 4513; continuando nella maniera medesima, otterrebbesi 3Eme, 14513, ec.

Queste considerazioni, e quelle del num.° precedente s'applicano senza pena a qualunque altra specie di misura del sistema decimale, ed offrono uno dei maggiori vantaggi di questo sistema.

105. Indicherò adesso alcuni usi della divisione. Essa serve primieramente a risolvere tutti i problemi del genere seguente. *Conoscendo ciò ch' è costato un certo numero di cose dello stesso valore, trovare questo valore.* Questo si trova osservando, che il prezzo cognito è necessariamente il prodotto del prezzo d'una cosa, moltiplicato per il numero delle cose (102); poichè è chiaro allora che se dividasi questo prodotto per lo fattore cognito, ch'è il numero delle cose, si deve avere per quoziente l'altro fattore, ovvero il prezzo d'una sola cosa (36).

Suppongo, per esempio, che avendo pagato per 19mi, 13 di stoffa 315fr., 45, si dimandi il costo d'un metro della medesima. Affin di trovarlo, divideremo 315fr., 45 per 19, 13, ed otterremo 16fr., 49.

Arriverebbesi allo stesso risultato anche nel seguente modo. Se si convertissero 19me, 13 in 1913 centimetri, e che si dividessero 315fr, 45 per 1913, avrebbesi il

prezzo d'un centimetro, il quale bisognerebbe moltiplicare in seguito per 100, onde aver quello d'un metro: ora egli è manifesto che impiegando un divisore come 19, 13 cento volte minore di 1913, si otterrà un quoziente cento volte maggiore, ed in conseguenza eguale a quello che si cerca. Dividendo dunque 315fr., 45 per 19, 13, troveremo 16fr., 49 per lo prezzo d'un metro di stoffa.

106. Ecco un secondo problema, nel quale il dividendo; ed il divisore son ambedue della stessa natura, e dove il quoziente è d'una natura diversa.

Si domanda quanti chiliogrammi d'una certa mercanzia, la quale costa 14fr., 5 il chiliogrammo, si avranno con 529fr., 35? È chiaro che il numero cercato è composto col chiliogrammo (sua unità) come 529fr., 35 lo è con 14fr., 5 prezzo d'un chiliogrammo. Se dunque si divida 529, 35 per 14, 5 il quoziente 36, 50689 esprimerà dei chiliogrammi, e delle suddivisioni di questa specie d'unità.

107. L'impiego delle frazioni si offre per sè stesso mediante l'enunciato dei rispettivi problemi. Se, per esempio, bisognasse valutare i $\frac{3}{4}$ di 219fr., 6, si dovrebbe moltiplicare 219fr., 6 per $\frac{3}{4}$, e vale a dire, moltiplicare questo numero per 3, e dividere in seguito il resultato per 4; il che darà 164fr., 7 (75).

Si potrebbero moltiplicare molto le diverse questioni che si risolvono mediante le quattro regole dell'aritmetica; ma ciò è inutile; imperocchè l'applicazione di queste regole non può presentare nessuna difficoltà, allorchè si sono ben comprese le definizioni, ed il fine di ciascheduna.

DELLE PROPORZIONI.

108. Abbiamo veduto, in ciò che precede, i diversi metodi necessarj per effettuare sopra i numeri, tanto interi, che frazionarj, le quattro operazioni fondamentali dell' aritimetica, l' addizione cioè, la sottrazione, la moltiplicazione, e la divisione; e tutti i problemi concernenti ai numeri debbono essere riguardati come risoluti allorchè, mediante l' esame attento del loro enunciato, siamo pervenuti a ridurli ad alcuna di queste operazioni. Potrei in conseguenza terminar quì ciò che ho da dire sull' aritmetica; poichè il rimanente è, a parlar propriamente, d' attenenza dell' Algebra: ma nonostante risolverò alcuni problemi, i quali, esercitando i Lettori su quello che dessi hanno di già veduto, gli prepàreranno all' analisi algebrica, e gli condurranno ad una teoria importantissima, quella cioè, dei *rapporti* e delle *proporzioni*, la qual si comprende ordinariamente nell' aritmetica.

109. *Una pezza di drappo lunga* 13 *metri è stata pagata* 130 *franchi: si domanda quanto costerebbe una pezza del medesimo drappo, la quale avesse* 18 *metri di lunghezza?*

È evidente che se si sapesse il prezzo d' un metro del drappo che si è comprato, ripeterebbesi questo prezzo diciotto volte, ed avrebbesi per risultato il prezzo della pezza composta di 18 metri: ora, poichè 13 metri son costati 130fr., un metro solo sarà costato la tredicesima parte di 130fr. ovvero $\frac{130}{13}$: facendo la divisione trovasi per resultato 10fr., e moltiplicando questo numero per 18, si ottiene 180fr. per la somma dimandata. Tal' è infatti il valor della pezza di diciotto metri.

Un Corriere, il quale si muove sempre colla stessa celerità, avendo percorso 5 *miriametri in* 3 *ore: si dimanda quanti ne percorrerà in* 11 *ore:*

Ragionando come nell' esempio precedente, si vede che que-

sto corriere percorrerebbe in un'ora $\frac{1}{3}$ di 5 miriametri, ovvero $\frac{3}{5}$; e che in 11 ore esso ne percorrerebbe 11 volte altrettanti, oppure $\frac{3}{5}$ di miriametro moltiplicati per 11, ovvero finalmente $\frac{33}{3}$; il che equivale a 18 miriametri e $\frac{1}{3}$.

Suppongo ancora che *si dimandi in quando tempo il corriere del problema antecedente percorrerebbe 22 miriametri.*

Si vede che se si conoscesse il tempo che desso impiega nel percorrere un miriametro, ripeterebbesi questo tempo 22 volte, ed avrebbesi per resultato il numero d'ore cercato: ora, il corriere, di cui si tratta, impiegando 3 ore nel percorrere 5 miriametri, non impiegherà che $\frac{1}{5}$ di questo tempo, ovvero $\frac{3}{5}$ d'ora per percorrere un miriametro: questo numero, essendo moltiplicato per 22, dà $\frac{66}{5}$ ovvero 13 ore e $\frac{1}{5}$; e siccome l'ora è di 60 minuti avremo 13 ore e 12 minuti in luogo di 13 ore e $\frac{1}{5}$.

110. Mediante l'analisi di ciascuno degli enunciati precedenti ho scoperto la quantità incognita; ma in tutti questi problemi i numeri cogniti, ed i numeri cercati dipendono gli uni dagli altri d'una maniera, ch'è a proposito di esaminare.

A tale oggetto, riprendo il primo problema, in cui trattasi di conoscere il prezzo di 18 metri di drappo, del quale 13 metri sono stati pagati 130 fr.

È manifesto che la somma da pagarsi per una pezza di drappo di cui si parla, diverrebbe doppia se questa pezza contenesse un numero di metri doppio del primo; che se questo numero divenisse triplo, il prezzo pure si triplicherebbe; e così di seguito, finalmente, che per la

metà, ovvero per i $\frac{2}{3}$ della pezza, non dovrebbesi pagare che là metà, oppure i $\frac{2}{3}$ del prezzo totale.

Dietro queste nozioni, che tutti coloro i quali intendono la proprietà dei termini, ammettono senza difficoltà, si fa chiaro che se si hanno due pezze del medesimo drappo, il prezzo della seconda deve contenere quello della prima tante volte quante volte la lunghezza della seconda contiene quella della prima; e questa circostanza si enuncia dicendo, che i prezzi sono in *proporzione* delle lunghezze, ovvero che son tra loro nel medesimo *rapporto* delle lunghezze.

Quest'esempio servirà a stabilire il senso di più espressioni, le quali si ripetono spesso.

111. Il *rapporto* delle lunghezze è il numero tanto intero che frazionario, il qual'esprime quanto una delle lunghezze contiene l'altra. Se la prima pezza fosse 4 metri, e la seconda 8, il rapporto di quest'ultima sarebbe 2; poichè 8 contiene 4 due volte. Nell'esempio sopra esposto, la prima pezza era di 13 metri, e la seconda di 18; il rapporto di questa colla prima era dunque $\frac{18}{13}$, ovvero 1 e $\frac{5}{13}$. In generale, *il rapporto, ovvero la ragione di due numeri, è il quoziente dell'uno diviso per l'altro.*

I prezzi avendo tra loro il medesimo rapporto delle lunghezze, bisogna che 180, prezzo della seconda pezza, essendo diviso per 130, prezzo della prima dia $\frac{18}{13}$ per quoziente: questo è ciò che ha difatto luogo; poichè riducendo $\frac{180}{130}$ alla sua più semplice espressione, si ha $\frac{18}{13}$.

I quattro numeri 13, 18, 130, 180 scritti nell'ordine, in cui qui si vedono, son dunque tali che *il secondo contiene il primo, tante volte quanto il quarto contiene il terzo*; ed essi formano così ciò che si chiama *proporzione*.

I numeri 13, 18, 130, e 180 si chiamano i termini della proporzione.

Si dice pure, *una proporzione è la riunione di due rapporti eguali.*

Bisogna osservare in quest' occasione, che un rapporto non cangia allorchè si moltiplicano, e si dividono i suoi due termini per un medesimo numero; e questo è evidente; poichè siffatto rapporto non essendo che il quoziente d' una divisione, può sempre esser posto sotto una forma frazionaria. Per questa ragione il rapporto $\frac{18}{15}$ è lo stesso di $\frac{180}{130}$.

Le medesime considerazioni s'applicano ancora al secondo esempio. Il Corriere, che percorre 5 miriametri in 3 ore, farebbe un viaggio doppio in un tempo doppio, triplo in un tempo triplo, così 11 ore, numero ch'esprime il tempo, che questo corriere ha impiegato nel percorre 18 miriametri e $\frac{1}{3}$, oppure $\frac{55}{3}$ di miriametro, deve contenere 3 ore, numero che esprime il tempo che desso mette a percorrere 5 miriametri, tante volte quante $\frac{55}{3}$ contiene 5: i quattro numeri 5, $\frac{55}{3}$, 3, 11 sono dunque in proporzione: ed infatti, se si divida $\frac{55}{3}$ per 5, avremo $\frac{55}{15}$; resultato equivalente a $\frac{11}{3}$. Sarà facile adesso di riconoscere tutti i casi, ove avrà luogo la proporzione tra quattro numeri.

112. Per indicare che v'è proporzione tra i numeri 13, 18, 130, e 180, si scrivono essi nel modo seguente 13; 18 : : 130 : 180; e si enuncia 13 *sta* a 18 *come* 130 *sta* a 180; il che vuol dire che 13 è la medesima parte di 18, che il 130 la è di 180; ovvero che 13 è contenuto in 18 tante volte, quanto il 130 lo è in 180; oppur fi-

nalmente che il rapporto di 18 a 13 è lo stesso di quello di 180 a 130.

Il primo termine d' un rapporto si chiama *antecedente*, ed il secondo chiamasi *conseguente*. In una proporzione vi son due *antecedenti*, e due *conseguenti*, cioè, l'antecedente del primo rapporto, e quello del secondo; il conseguente del primo rapporto, e quel del secondo. Nella proporzione 13 : 18 : : 130 : 180 gli antecedenti sono 13, e 130; conseguenti sono 18, e 180.

Prenderò d'ora in avanti il conseguente del rapporto per il numeratore della frazione, la quale esprime il rapporto, e l'antecedente pel denominatore.

113. Per assicurarsi che v'è proporzione tra i quattro numeri 13, 18, 130, e 180, bisogna vedere se le frazioni $\frac{28}{13}$, e $\frac{180}{130}$ sono eguali, e per questo ridur la seconda alla sua espressione più semplice: ma si può ancora fare la medesima verificazione osservando, che se le due frazioni $\frac{18}{13}$, e $\frac{180}{130}$ sono equivalenti, come si suppongono, ne segue che riducendole al medesimo denominatore, il numeratore dell'una diverrà eguale a quello dell'altra; e che in conseguenza 18 moltiplicato per 130 darà il medesimo prodotto che 180 per 13. Quest'è ciò che difatto ha luogo; ed il ragionamento, che ci ha condotto a conoscerlo, essendo indipendente dai valori particolari dei numeri, dimostra, che *se quattro numeri sono in proporzione, il prodotto del primo, e dell' ultimo, ovvero dei due* estremi, *è eguale a quello del secondo, e del terzo, ovvero dei due* medj.

Si vede nel tempo stesso che se i quattro numeri proposti non fossero in proporzione, essi non avrebbero la proprietà enunciata di sopra; poichè la frazione, ch'esprime il primo rapporto, non essendo equivalente a quella, ch'esprime il secondo, il numeratore dell'una non diverrebbe eguale a quello dell'altra allorchè si riducono ambedue al medesimo denominatore.

114. La prima conseguenza, che si deduce naturalmente da ciò che precede, è che si può cangiare l'ordine dei termini d'una proporzione, purchè quello che si stabilisce, sia tale che il prodotto degli estremi resti sempre eguale a quello dei medj. Nella proporzione 13 : 18 : : 130: 180 si possono dunque fare le disposizioni seguenti:

13 : 18 :: 130 : 180

13 : 130 :: 18 : 180

180 : 130 :: 18 : 13

180 : 18 :: 130 : 13

18 : 13 :: 180 : 130

18 : 180 :: 13 : 130

130 : 13 :: 180 : 18

130 : 180 :: 13 : 18;

poichè in ciascuna di esse il prodotto degli estremi ed il prodotto dei medj son sempre formati dai fattori medesimi. La seconda disposizione, nella quale i medj hanno cangiato di posto tra loro, è una di quelle che si praticano più di sovente (*).

(*) Credo a proposito d'osservare, che la proporzione 13 : 130 :: 18 : 180 sarebbesi presentata immediatamente sotto questa forma dietro alla soluzione medesima del problema del numero 109; poichè si può avere il valore d'un metro di drappo in due maniere; cioè, dividendo il prezzo della pezza di 13 metri per 13, ovvero dividendo quello della pezza di 18 metri per 18. Segue dunque da ciò che il prezzo della prima deve contenere 13 tante volte quante il prezzo della seconda contiene 18; avremo dunque 13 : 130 :: 18 : 180. Potrebbesi ragionare nella stessa maniera sul secondo problema del medesimo numero, come pure su tutti quelli di questo genere: e derivare da ciò le proporzioni; ma ho preferito il punto di vista del n. 109, perchè questo conduce a paragonare tra loro delle quantità della

115. Fa di mestieri osservare, che si possono moltiplicare oppur dividere per un medesimo numero i due antecedenti, ovvero i due conseguenti d'una proporzione senza turbarla; poichè questo cangiamento fa dei due antecedenti il primo rapporto, e dei due conseguenti il secondo. Se s'avesse, per esempio, 55 : 21 :: 165 : 63, cangiando i medii di posto, avrebbesi 55 : 165 :: 21 : 63; si potrebbero allora dividere i due termini, i quali formano il primo rapporto pel numero 5 (111), il che darebbe 11 : 33 :: 21 : 63; cangiando di nuovo i medj di posto, troverebbesi 11 : 21 :: 33 : 63; proporzione, la quale è parimente vera, e che non differisce dalla proposta se non in ciò che i due antecedenti sono stati divisi per 5.

116. Poichè il prodotto degli estremi è eguale a quello dei medj, possiamo prendere uno di questi prodotti per l'altro; e siccome, dividendo il prodotto degli estremi per un estremo, troverebbesi necessariamente l'altro per quoziente, *bisognerà che dividendo il prodotto dei medj per un estremo, si trovi parimente l'altro estremo.* Per la medesima ragione, *se si divide il prodotto degli estremi per uno dei medj ottiene l'altro medio.*

Si può dunque trovare un termine qualunque d'una proporzione allorchè si conoscano gli altri tre; poichè il termine cercato non può essere che uno degli estremi, oppure uno dei medj.

Il problema del n. 109. si risolve col mezzo d'una delle regole summentovate. Difatto, allorchè abbiamo riconosciuto, che i prezzi delle due pezze di drappo sono in proporzione co' numeri dei metri contenuti in ciascuna, si scrive nella maniera seguente questa proporzione

$$13 : 18 :: 130 : x$$

---

medesima specie, nel mentre qui bisogna paragonare i prezzi, i quali sono delle somme di danaro, a dei metri, i quali sono misure di lunghezza; il che non può farsi se che considerando gli uni e gli altri come numeri astratti.

ponendo la lettera x per occupare il posto del prezzo cercato della pezza di 18 metri; e si trova questo prezzo, il quale è uno degli estremi, moltiplicando tra loro i due medj 18, e 130, il che dà 2340, e dividendo questo prodotto per l'estremo cognito 13; si ha per risultato 180.

L'operazione, mediante la quale essendo dati tre termini qualunque d'una proporzione trovasi il quarto si chiama *regola del tre*. Gli autori della maggior parte dei libri d'aritmetica l'hanno distinta in più specie; ma questo apparato è inutile allorchè si è ben concepito in che cosa consista la proporzione, e che si è ben compreso l'enunciato del problema proposto. Ciò sarà reso chiaro da alcune applicazioni.

117. Un operajo avendo fatto 217me, 5 di lavoro in 9 giorni, si dimanda quanto tempo impiegherebbe a farne 423mi, 9 supponendo ch'esso lavorasse sempre nella maniera medesima?

In questo problema l'incognita è un numero di giorni, il quale deve contenere i 9 giorni impiegati nel fare 217me, 5 tante volte, quante 423, 9 contiene 217, 5; si ha dunque la proporzione seguente 217, 5 : 423, 9 :: 9 : x, e per x si trova 17, 54.

118. Tutta la difficoltà dei problemi che si possono incontrare, non consiste che nella maniera d'intavolare la proporzione; ed ecco delle regole sicure per formarla in in tutti i casi.

Tra i quattro termini i quali debbon comporre la proporzione, vi sono due numeri che sono d'una medesima specie, e due numeri i quali son pure d'una medesima specie, ma differente dalla prima. Nell'esempio precedente due dei termini esprimevano dei metri, e gli altri dei giorni.

Bisogna dunque primieramente distinguere i due termini di ciascuna specie; e quando ciò sarà fatto, avremo necessariamente il quoziente del maggior termine della seconda specie diviso pel minor termine di questa specie, egua-

le al quoziente del maggior termine della prima specie diviso per il minore di questa specie; il che darà la seguente proporzione;

Il minor termine della prima specie

sta

al maggior termine di questa specie

come

il minor termine della seconda specie,

sta

al maggiore di questa specie.

Nell' esempio precedente questa regola dà immediatamente .217, 5 : 423, 9 :: 9 : x; perchè il termine incognito dev' essere maggiore di 9, a causa ch' è necessario un maggior numero di giorni quanto più è grande il lavoro da farsi.

119. Se fosse proposto di trovar quanti giorni impiegherebbero 27 operaj per eseguire un lavoro che 15 operaj, i quali lavorassero tanto quanto i primi, hanno fatto in 18 giorni, vedrebbesi che bisognano tanti giorni di meno quanto più grande è il numero degli operaj, e viceversa. Ha luogo la proporzione anche in questo caso, ma in ordine inverso: poichè, se il numero degli operaj della seconda compagnia fosse, per esempio, triplo del numero di quei della prima, non bisognerebbe loro che il terzo del tempo impiegato da questi ultimi: sarebbe dunque il primo numero di giorni che dovrebbe contenere il secondo, tante volte quante il secondo numero degli operaj contiene il primo.

L'ordine, nel quale queste quantità si contengono, essendo l'inverso di quello, che loro è stato assegnato dall'enunciato del problema, si dice che i due numeri degli

operaj sono in *ragione inversa* dei numeri de'giorni. Se si paragonassero i due primi, ed i due ultimi nell'ordine, in cui dessi presentansi; il rappporto degli uni sarebbe 3, ovvero $\frac{3}{1}$, e quello degli altri sarebbe $\frac{1}{3}$, frazione inversa di $\frac{3}{1}$.

Si vede infatti chiaramente, che si rovescia un rapporto rovesciando la frazione che l'esprime; poichè in tal maniera si fa pessare l'antecedente nel posto del conseguente, ed il conseguente nel posto dell'antecedente; $\frac{3}{2}$, oppure 2 : 3 è l'inverso di $\frac{2}{3}$, o sivvero di 3 : 2.

La regola del numero precedente semplifica molto queste considerazioni; poichè prendendo i due numeri degli operaj per le quantità della prima specie, i due numeri dei giorni per quelle della seconda, e ponendo le une, e le altre secondo il loro ordine di grandezza, si ha questa proporzione.

$$15 : 27 :: x : 18$$

dalla quale ricavasi x ugnale a 10.

120. Ecco ancora alcuni esempj per esercitare il lettore.

1. Un Uomo ha impiegato 3575 fr. in un traffico a ragione del 5 per cento d'interesse l'anno; si domanda a quanto debbe ammontare, alla fine d'un anno, l'interesse del suo capitale?

L'espressione 5 per 100 d'interesse, la quale scrivesi in questa maniera, 5 per $\frac{0}{0}$, significa che una somma di 100 fr. rapporterebbe 5. fr. alla fine d'un anno; prendendo dunque i due capitali per le quantità della prima specie, e gl'interessi per quelle della seconda, avremo

$$100 : 3575 :: 5 : x$$

proporzione la quale riducesi a 20 : 3575 :: 1 : x, dietro all' osservazione del num. 115 : dividendo altresì i due termini del primo rapporto per 5, trovasi finalmente

$$4 : 715 :: 1 : x,$$

dalla quale ricavasi x eguale a $\frac{715}{4}$, ovvero a 178fr., 75.

Si può ancora risolvere questo problema osservando, che 5 sono $\frac{1}{20}$ di 100, e che in conseguenza avremo l'interesse d'una somma qualunque a questa ragione, prendendo il ventesimo di questa somma: ora $\frac{1}{20}$ di 3575 è 178fr., 75; resultato conforme a quello che abbiamo di già trovato di sopra.

2.° Un mercante ha promesso di pagare 800 fr. in un anno; non potendo aspettare questo termine, la sua cambiale vien passata ad un banchiere otto mesi avanti l'epoca del pagamento: si domanda quanto debba dare il banchiere? Quest' ultimo, avendo pagato una somma, la quale egli non deve ritirare che dopo otto mesi, bisogna necessariamente che trovi nel rimborso che gli sarà allora fatto, l' interesse del suo denaro.

L' interesse per un anno sia di 6 per 100; l' interesse per otto mesi ne sarà gli $\frac{8}{12}$, ovvero i $\frac{2}{3}$: dunque una somma di 100 fr. prestata per otto mesi deve produrre 4. fr. d' interesse, e vale a dire, che colui che l' ha ricevuta in prestito, deve rendere 104 fr. La somma di 800 fr. anticipata dal banchiere non essendo che un simile prestito, avremo questa proporzione;

$$104 \text{ fr.} : 100\text{fr.} :: 800 : x$$

dalla quale ricaveremo 769fr., 23 per il valore di x, cioè, per la somma, che deve pagare il banchiere (*).

(*) L' operazione qui sopra enunciata, la quale si chiama *regola*

REGOLA DEL TRE COMPOSTA.

121. La regola del tre si applica ancora a dei problemi nei quali il rapporto della quantità cercata alla quantità data della medesima specie dipende da più circostanze; che fa di mestieri combinare, e prende allora il nome di *regola del tre composta*. Eccone alcuni esempj.

Suppongo che si dimandi quanti miriametri percorrerebbe in 17 giorni un viaggiatore caminando 10 ore per giorno, allorchè si sa ch' esso ha impiegato 29 giorni nel percorrere 112 miriametri, caminando 7 ore per giorno.

Questo problema può risolversi in due maniere: ecco quella che dà luogo alla regola del tre composta.

Il numero dei miriametri percorsi in ciascun caso dipende da due circostanze, cioè, dal numero dei giorni di cammino del viaggiatore, e dal numero delle ore che desso viaggia in ciascun giorno.

Possiamo primieramente far astrazione da quest' ultima circostanza, e supporre che il numero delle ore sia lo stesso nel secondo caso come nel primo. Allora il problema sarebbe posto così *Un viaggiatore ha impiegato* 29 *giorni a percorrere* 112 *miriametri*; *quanti ne percorrebbe esso in* 17 *giorni*; ed avrebbesi la proporzione.

$$29^{\text{gior.}} : 17^{\text{gior.}} :: 112^{\text{mir.}} : x.$$

Il quarto termine sarebbe eguale a 112 moltiplicato per

---

di sconto, riducesi ordinariamente a prelevare l'interesse dalla somma intera portata sulla cambiale; lo che non corrisponde allo stato della questione, e non è perciò esatta. Nel nostro esempio, l'interesse del 4 per 100 ascenderebbe a 32fr. : dunque il banchiere non pagherebbe che 768fr.

In questa maniera *lo sconto è preso al di fuori*; *nell'altra è al di dentro* della somma portata sulla cambiale.

17, e diviso per 29, ovvero $\frac{1904}{29}$ miriametri.

Ora, per aver riguardo alla differenza dei numeri delle ore del viaggio, direbbesi: *Se camminando 7 ore il giorno, per un certo numero di giorni, questo viaggiatore ha percorso* $\frac{1904}{29}$ *miriametri, quanti desso ne percorrerebbe nel medesimo tempo se camminasse 10 ore per giorno?* il che condurrebbe alla proporzione seguente:

$$7^{or.} : 10^{or.} :: \frac{1904}{29} \text{ miriametri} : x$$

il cui quarto termine darebbe 93, 793 per il numero dei miriametri domandato.

Il problema risolverebbesi ancora osservando che 29 giorni di viaggio, a 7 ore per giorno, equivalgono a 203 ore di viaggio: che 17 giorni di viaggio, a 10 ore per giorno, danno 170 ore; e che in conseguenza il problema è ridotto a questa proporzione:

$$203^{or.} : 170^{or.} :: 112^{mir.} : x$$

mediante la quale si trova il viaggio che deve fare il viaggiatore in 170 ore, in seguito di quello che desso ha fatto in 203 ore.

122. Secondariamente, se 9 operaj, lavorando 8 ore per giorno, hanno impiegato 24 giorni a cavare un fosso di 65 metri di lunghezza, sopra 13 di larghezza, e 5 di profondità, quanti giorni sarebbero necessarj a 71 operaj della medesima forza dei primi e che lavorassero 11 ore per giorno, per escavare un fosso di 327 metri di lunghezza, sopra 18 di larghezza, e 7 di profondità?

Ecco pure un problema in apparenza assai complicato, e che si risolve egualmente colla regola del tre.

Se tutto, ad eccezione del numero dei giorni, e del

numero degli uomini, fosse eguale nei due casi enunciati, il problema ridurrebbesi a trovare quanti giorni sarebbero necessarj a 71 uomini per far il lavoro, ch'è stato eseguito da 9 uomini in 24 giorni, avrebbesi dunque (118).

$$9 : 71 :: x : 24;$$

ma quì, in luogo di calcolare il numero dei giorni, mi contento d'indicare, come nel numero 70, i numeri da moltiplicarsi tra loro, e di mettere nel denominatore quelli, pei quali bisogna dividere: in tal maniera ho per il numero x dei giorni,

$$\frac{24 \text{ per } 9}{71}.$$

Ma i primi operaj non lavorando che 8 ore per giorno; laddovechè i secondi lavorano per 11 ore, saranno necessarj dei giorni di meno a questi ultimi; avrem dunque

$$8 : 11 :: x : \frac{24 \text{ per } 9}{71},$$

da cui ne concluderemo che il numero dei giorni in tal circostanza è

$$\frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8}{71 \text{ per } 11}.$$

Questo numero è quello dei giorni necessarj ai 71 operaj, che lavorano 11 ore per giorno, per cavare il primo fosso.

I fossi essendo di lunghezze ineguali, saran necessarj tanti giorni di più quanto il secondo sarà più lungo del primo; quindi averemo

$$65 : 327 :: \frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8}{71 \text{ per } 11} : x,$$

ed il numero dei giorni relativi a questa nuova circostanza sarà

$$\frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8 \text{ per } 327}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65}.$$

Avendo riguardo alle larghezze, le quali non sono le medesime in ambedue i fossi, ho

$$13 : 18 :: \frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8 \text{ per } 327}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65} : x,$$

ed in conseguenza il numero dei giorni cercato si cangia in

$$\frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8 \text{ per } 327 \text{ per } 18}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65 \text{ per } 13}.$$

Finalmente, le profondità essendo differenti, si ha

$$5 : 7 :: \frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8 \text{ per } 327 \text{ per } 18}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65 \text{ per } 13} : x,$$

ed il numero dei giorni resultante dal concorso di tutte le circostanze è

$$\frac{24 \text{ per } 9 \text{ per } 8 \text{ per } 327 \text{ per } 18 \text{ per } 7}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65 \text{ per } 13 \text{ per } 5}$$

Effettuando le moltiplicazioni, e le divisioni, arriveremo al resultato cercato 21 giorni $\frac{1902931}{3299725}$.

123. Questo numero è eguale a 24 moltiplicato per la quantità frazionaria

$$\frac{9 \text{ per } 8 \text{ per } 327 \text{ per } 18 \text{ per } 7}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65 \text{ per } 13 \text{ per } 5};$$

ma quest' ultima quantità, ch' esprime il rapporto del nu-

mero dei giorni dato al numero dei giorni cercato, è dessa pure il prodotto delle frazioni seguenti

$$\frac{9}{71}, \quad \frac{8}{11}, \quad \frac{327}{65}, \quad \frac{18}{13}, \quad \frac{7}{5},$$

ora, risalendo alle denominazioni dei numeri dati nell'enunciato del problema, si scorge che $\frac{9}{71}$ è l'inverso del rapporto dei numeri degli uomini, il quale, preso nell'ordine dell'enunciato, sarebbe di 9 a 71, poichè vi sono 9 uomini nel primo caso, e 71 nel secondo; $\frac{8}{11}$ è parimente l'inverso del rapporto dei numeri di ore in cui ciascuna compagnia di operaj deve lavorare;

$$\frac{327}{65}, \quad \frac{18}{13}, \text{ e } \frac{7}{5}$$

sono i rapporti diretti delle lunghezze, delle larghezze, e delle profondità dei due fossi. Segue da ciò, che il rapporto del numero dei giorni dato al numero de' giorni cercato, è eguale al prodotto di tutti i rapporti diretti, e di tutti rapporti inversi che resultano dal paragone dei termini relativi a ciascuna delle circostanze del problema.

Risolveremo il problema semplicissimamente valutando in primo luogo ciascuno di questi rapporti: poichè moltiplicando tra loro le frazioni, che gli esprimono, formeremo quella che rappresenta il rapporto della quantità cercata alla quantità data della medesima specie.

Quest' ultima frazione, la quale sarà il prodotto di tutti i rapporti i quali entrano nel problema, avrà per numeratore il prodotto di tutti i loro antecedenti, e per denominatore quello di tutti i loro conseguenti. Un rapporto, che risulta così dalla moltiplicazione di più altri, si chiama *rapporto composto*.

Mettendo l' espressione frazionaria

$$\frac{9 \text{ per } 8 \text{ per } 327 \text{ per } 18 \text{ per } 7}{71 \text{ per } 11 \text{ per } 65 \text{ per } 13 \text{ per } 5}$$

sotto la forma d' un sol rapporto, ricaveremo col numero 24 dei giorni dati la proporzione seguente;

$$71 \text{ per } 11 \text{ per } 65 \text{ per } 13 \text{ per } 5 : 9 \text{ per } 8 \text{ per } 327 \text{ per } 18 \text{ per } 7 :: 24 : x$$

la quale è facile ad imitarsi in tutti i casi consimili.

REGOLA DI COMPAGNIA.

124. Questa regola ha per oggetto di dividere un numero in parti che abbiano tra loro dei rapporti dati; vedremo nell' esempio seguente la sua origine, e di dov' essa abbia ricavato il suo nome.

Tre mercanti si sono associati per un traffico: il primo ha posto 25000 fr., il secondo 18000, ed il terzo 42000; essi separansi, e voglion dividere tra loro il guadagno comune, il quale ascende a 57225 fr.: si domanda quanto ciascun debba avere per la sua parte?

A fin di risolvere questo problema, fa di mestieri considerare che il guadagno di ciascuno di essi dev' essere composto col quadagno totale, come il suo fondo lo è colla somma dei fondi o col fondo totale; poichè quello che avesse somministrato da sè solo la metà, o il terzo di questo fondo, per esempio, avrebbe evidentemente diritto alla meta, o al terzo del guadagno. Nell' esempio proposto la somma dei fondi formando 85000 fr.; i fondi particolari ne saranno respettivamente i

$$\frac{25000}{85000}, \quad \frac{18000}{85000}, \quad \frac{42000}{85000},$$

e moltiplicando per queste frazioni il guadagno totale 57225 fr. otterremo il guadagno relativo a ciascun fondo. È manifesto d'altronde che la somma delle parti uguaglierà il guadagno totale, poichè la somma delle frazioni qui sopra segnate, avendo il suo numeratore eguale al suo denominatore, è necessariamente eguale all'unità.

Le operazioni indicate qui sopra somministrano le proporzioni

85000 : 25000 :: 57225 : al quadagno del 1.° mercante;

85000 : 18000 :: 57225 : al quadagno del 2.°;

85000 : 42000 :: 57225 : al quadagno del 3.°,

le quali possono enunciarsi così :

il fondo totale : un fondo particolare :: il guadagno totale : al quadagno particolare.

Semplificando i primi rapporti di ciascuna di queste tre proporzioni si ha

85 : 25 :: 57225 : al guadagno del 1.°, ovvero 16830 fr. $\frac{75}{85}$

85 : 18 :: 57225 : al guadagno del 2.°, ovvero 12118 fr. $\frac{20}{85}$

85 : 42 :: 57225 : al guadagno del 3.°, ovvero 28275 fr. $\frac{75}{85}$

Se tutti i fondi fossero eguali, l'operazione ridurrebbesi a dividere il guadagno totale pel numero dei fondi : si riduce il problema sotto a questo punto di vista nell'esempio proposto supponendo il fondo totale 82000 fr. diviso in fondi parziali, ovvero *azioni*, di 1000 fr.; il guadagno di ciascuno di questi fondi debb'evidentemente essere la 85ma parte del guadagno totale, ed altro non resta che a moltiplicar successivamente questa parte per 24, 18, e 42, considerando i fondi 25000 fr., 18000 fr., come le riunioni di 25 azioni, di 18 azioni, e di 42 azioni.

Giova sapere che in termini di commercio il fondo totale chiamasi *capitale*, ed il guadagno da dividersi *dividendo*.

Il problema seguente ha molta analogia con quello che abbiamo ora sciolto.

125. Si domanda di dividere un'eredità di 67250 fr. fra tre eredi, in modo che la porzione del secondo erede sia i $\frac{2}{5}$ di quella del primo, e che la porzione del terzo sia i $\frac{7}{8}$ di quella del secondo.

È manifesto che la parte del terzo, paragonata a quella del primo, ne sarà i $\frac{7}{8}$ dei $\frac{2}{5}$, ovvero i $\frac{14}{40}$; oppure i $\frac{7}{20}$; queste tre parti cercate saranno dunque tra loro nei rapporti medesimi dei tre numeri 1, $\frac{2}{5}$, e $\frac{7}{20}$. Riducendo questi ultimi al medesimo denominatore, troveremo $\frac{20}{20}$ $\frac{8}{20}$, $\frac{7}{20}$, ed avremo i tre numeri 20, 8, 7, i quali saranno proporzionali ai primi; ma la lor somma essendo 35, si vede che se si prendon tre parti, le quali siano espresse dalle frazioni $\frac{20}{35}$, $\frac{8}{35}$, $\frac{7}{35}$, desse saranno tra loro nei domandati rapporti: il problema sarà dunque risoluto prendendo i $\frac{20}{35}$, poi gli $\frac{8}{35}$, poi i $\frac{7}{35}$ di 67250 fr.; il che darà le somme dovute agli eredi secondo la distribuzione prescritta, cioè

$$38428 \text{ fr. } \frac{20}{35}, \quad 15371 \text{ fr. } \frac{15}{35}; \text{ e } 13450 \text{ fr.}$$

126. Finalmente siano due fontane, di cui la prima,

versando da sè sola per 2 ore $\frac{1}{2}$, riempie una certa vasca, e la seconda riempie questa medesima vasca versando sola per 3 ore $\frac{3}{4}$: si domanda quanto tempo sarà necessario perchè la detta vasca sia riempita facendo versare nel tempo stesso le due fontane?

Cerco qual porzione della vasca la prima fontana riempie in un tempo dato, per esempio, in un'ora, e vedo che prendendo la capacità di questo bacino per unità, altro non debbo fare che dividere 1 per 2 $\frac{1}{2}$, ovvero $\frac{5}{2}$, il che dà $\frac{2}{5}$ per la porzione cercata. Dividendo parimente 1 per 3 $\frac{3}{4}$, ovvero $\frac{15}{4}$, ottengo $\frac{4}{15}$ per la porzione della vasca che la seconda fontana riempie in un'ora: le due fontane versando insieme riempiranno in conseguenza i $\frac{2}{5}$ più i $\frac{4}{15}$, ovvero i $\frac{10}{15}$ della vasca in 1 ora: dividendo dunque 1, ovvero la capacità della vasca, per $\frac{10}{15}$, avremo il numero delle ore che saranno necessarie per riempirla in questa maniera, e troveremo in tal modo $\frac{15}{10}$, ovvero un'ora e mezza.

Gli autori, che hanno scritto sull'Aritmetica, hanno moltiplicati e variati questi problemi in molte maniere, ed hanno stabilito in regole i metodi, i quali conducono a risolverli; ma tutti questi precetti sono quasi inutili, poichè un problema di questo genere è sempre facilmente risoluto da colui che sa sviluppare le conseguenze dell'enunciato, soprattutto quand'ei può ajutarsi col soccorso dell'Algebra: ecco perchè io non mi tratterrò davvantaggio.

127. A somiglianza delle proporzioni, le quali sono composte di quattro numeri, di cui i due primi si contengono tante

volte quante i due ultimi, si è considerato l'insieme di quattro numeri tali come 2, 7, 9, 14, di cui il secondo sorpassa il primo di tanto, quanto il quarto sorpassa il terzo: questi numeri che si possono chiamare *equidifferenti*, godono d'una proprietà riguardevole, analoga a quella della proporzione; poichè la somma dei termini estremi 2 e 14 è eguale a quella dei medj 7, e 9 (*).

Per dimostrare questa proprietà in generale, bisogna osservare che il secondo termine è eguale al primo, più la differenza, e che il quarto è eguale al terzo piu la differenza; dal che ne segue che la somma degli estremi, composta del primo, e del quarto termine, sarà eguale al primo più il terzo, più la differenza. Parimente la somma dei medj, composta del secondo, e del terzo termine, sarà eguale al primo più la differenza più il terzo. Queste due somme, essendo composte delle medesime parti, sono in conseguenza eguali.

Ho supposto che il secondo, ed il quarto termine fossero maggiori del primo, e del terzo; il contrario potrebbe aver luogo come nei quattro numeri 8, 5, 15, 12: allora il secondo termine sarebbe eguale al primo meno la diffe-

(*) Gli antichi avevan benissimo separata la teoria delle proporzioni dalle operazioni dell'Aritmetica. Euclide dà questa teoria nel quinto libro dei suoi *Elementi*; e siccome egli applica le proporzioni alle linee, è verisimile che da ciò esse hanno preso in seguito il nome di *proporzioni geometriche* e che si è dato il nome di *proporzione aritmetica* all'insieme dei numeri equidifferenti, della quale niuno si è occupato che molto più tardi. Queste denominazioni sono viziosissime; la parola *proporzione*, nel nostro linguaggio, ha un senso determinato, il quale non conviene per niente ai numeri equidifferenti. D'altronde la proporzione, che si chiama *geometrica*, non è meno *aritmetica* di quella che porta esclusivamente tal nome. Lagrange, nelle sue Lezioni alla Scuola Normale, ha rettificato il linguaggio a questo riguardo, ed io ho seguito il suo esempio.

L'*equidifferenza*, ovvero l'insieme di quattro numeri equidifferenti, oppur finalmente la *proporzione aritmetica* si scrive così 2 7 : 9 . 14.

renza, ed il quarto sarebbe eguale al terzo meno la differenza. Cangiando la parola *più* in *meno* nel precedente ragionamento, proverebbesi ancora che nel caso attuale la somma degli estremi è eguale a quella dei medj.

Non ispingerò più avanti questa teoria dei numeri equidifferenti, perchè dessa non può essere d'alcun uso presentemente.

REGOLA D'ALLICAZIONE.

128. Io non ometterò punto la *regola di alligazione*, il fine della quale si è di trovare il valore medio di più cose della medesima specie, ma di prezzi diversi: gli esempj seguenti la faranno sufficientemente conoscere.

Un mercante ha comprato più specie di vini, vale a dire.

130 bottiglie	a 10 decimi l'una	
75	a 15	
231	a 12	
27	a 20;	

egli le mescola in seguito: si domanda quanto gli costa una bottiglia del vin mescolato? E facil vedere che altro non dovrà farsi che valutare ciò che gli costa la totalità di questo, quante bottiglie esso forma, e dividere in appresso il primo di questi resultati per il secondo, onde avere il prezzo cercato.

Ora, le 130 bottiglie a 10 decimi fanno 1300 decimi

75	a 15	fanno 1125
231	a 12	fanno 2772
27	a 20	fanno 540

dunque 463 bottiglie costano 5737 decimi.

Dividendo 5737 per 463, il quoziente 12, 39 è il prezzo d'una bottiglia del misto.

129. Ci serviamo pure della regola precedente a fine di prendere un medio tra diversi resultati dati dall'esperienza, o dall'osservazione, e che non s'accordano tra di loro. Se si trattasse, per esempio, di conoscere esattamente la distanza di due punti assai lontani, e che questa si misurasse, per quanta cura si portasse in quest'operazione, vi sarebbe sempre un poco d'incertezza nel resultato, a motivo degli errori che si commettono necessariamente nella maniera di posare le misure successivamente l'una dopo dell'altra.

Suppongo dunque che siasi ripetuta quest'operazione più volte di seguito per verificarla, e che due volte siasi trovata di 3794mi, 48; che tre altre misurazioni abbian dato 3795mi, 27; che siasi ottenuto finalmente un ultimo resultato di 3793mi, 115: questi diversi numeri non essendo gli stessi, è evidente che vi è errore in alcuni di loro, e probabilmente in tutti; laonde, per diminuirlo, ecco come ragionasi. Se si fosse ottenuta ciascuna volta la vera misura, la somma dei resultati sarebbe eguale a sei volte questa misura; ed è manifesto che la medesima cosa avrebbe ancor luogo se i resultati ottenuti peccassero gli uni per difetto, gli altri per eccesso, di maniera che l'aumento prodotto dalla somma degli eccessi compensasse ciò che manca ai resultati minori del vero valore: arriverebbesi dunque in quest'ultimo caso, alla vera misura, dividendo la somma dei resultati per il loro numero.

Questo caso è troppo particolare per potere sperar che s'incontri frequentemente; ma quasi sempre accade che gli errori in un senso distruggono una parte di quelli che sono nel senso opposto; e ciò che resta, trovandosi repartito egualmente sopra ciascuno dei resultati, è tanto più diminuito quanto più il numero dei resultati è maggiore.

Dietro a queste considerazioni, opereremo nel modo seguente.

Prenderemo	2 volte 3794,48	ovvero	7588,96
	3 volte 3795,27	ovvero	11385,81
	1 volte 3793,115	ovvero	3793,115
	6 resultati somministrano in tutto		22767,885

Dividendo 22767,885 per 6, troveremo che il valore medio della distanza cercata è 3794^{mi}, 647.

Del rimanente bisogna ricorrere al calcolo delle probabilità per discutere, ed apprezzare i vantaggi, e gl' inconvenienti di questo metodo; e sì fatto argomento ha occupato i più grandi geometri del nostro secolo.

DEL PARAGONE DELLE DIVERSE MISURE DEL MEDESIMO GENERE.

130. L' uniformità delle misure era sin da gran tempo l' oggetto dei voti di tutti i dotti, allorchè fu stabilito in Francia il sistema decimale, che ho esposto di sopra (100); ma questo sistema non essendo ancora adottato dalle nazioni straniere, e succedendo ad un antico sistema, per il quale sono stati espressi molti resultati numerici importanti, abbiamo spesso bisogno di paragonare colle misure decimali tanto le antiche misure francesi, quanto le misure straniere. Passo in conseguenza a indicare i mezzi di far questa comparazione.

I dati necessarj sono i rapporti delle misure da paragonarsi. Questi rapporti si ottengono esprimendo una delle misure per mezzo dell' altra.

131. Le misure lineari le più usitate in Francia erano la *tesa*, e l' *auna*.

La tesa si divide in 6 piedi;
Il piede in 12 pollici;
Il pollice in 12 linee;
La linea in 12 punti.

L'auna (di Parigi) contiene 3 piedi, 7 pollici, 10 linee $\frac{5}{6}$. Paragono in primo luogo la tesa al metro.

Il metro, determinato *definitivamente*, è stato trovato di 3 piedi, o pollici, 11 linee, 296.

Questo numero, essendo ridotto a frazione della tesa, dà il rapporto del metro alla tesa.

Per far questa riduzione, bisogna primieramente convertire i piedi in linee, il che si farà osservando che siccome il piede equivale a 12 pollici, 3 piedi fanno 36 pollici, e poichè il pollice equivale a 12 linee, moltiplicheremo 36 per 12, il che darà 432 per il valor di 3 piedi convertiti in linee; alle quali bisognerà aggiungere le linee 11,296 di più, e verrà 443 linee 296.

Da un altro lato, la tesa, composta di 6 piedi, contiene 6 volte 12 pollici, o 72 volte 12 linee, ovvero 864 linee. La tesa contenendo dunque 864 linee, mentre che il metro ne contiene solamente 443,296, il rapporto del metro alla tesa è quello dei numeri 443,296, e 864, o sivvero dei numeri 443296, e 864000. mille volte maggiori dei precedenti. La tesa è dunque gli $\frac{864000}{443296}$ del metro; frazione, che si riduce a $\frac{27000}{13853}$, dividendo i suoi due termini per 32.

132. Segue da ciò e dal n. 75 che per convertire un numero qualunque di tese in metri, bisogna moltiplicarlo per la frazion $\frac{27000}{13853}$.

Si dimanda, per esempio, 43 tese a quanti metri equi-

valgono? il resultato è $\frac{1161000}{13853}$; estraendo gl' interi da questa frazione, si ottiene 83 $\frac{11201}{13853}$; e riducendo in decimali la frazione che accompagna l'intiero, si ha 83, 80856.

Siccome è sufficiente, per gli usi ordinarj, una riduzione approssimativa, è comodo il convertire immediatamente in decimali la frazione $\frac{27000}{13853}$, il che dà pel valore della tesa 1me, 94904, e moltiplicando questo numero per quello delle tese proposte, effettueremo immediatamente la lor conversione in metri.

133. I piedi, i pollici, le linee, il rapporto dei quali colla tesa è già cognito, si convertono facilmente in parti decimali del metro.

1.° Il piede, essendo la sesta parte della tesa, equivarrà alla sesta parte della frazione $\frac{27000}{13853}$, ovvero $\frac{4500}{13853}$ del metro, ed in decimali, o^{me}, 32484, ovvero 3^{dme}, 2484.

2.° Il pollice, essendo la dodicesima parte del piede, sarà equivalente alla dodicesima parte della frazione, $\frac{4500}{13853}$, ovvero a $\frac{375}{13853}$ di metro, ed in decimali, o^{me}, 02707, ossia 2^{cme}, 707,

3.° La linea, essendo la dodicesima parte del pollice, equivarrà alla dodicesima parte della frazione $\frac{375}{13853}$, ovvero a $\frac{125}{55412}$ del metro, ed in decimali, o^{me}, 00226: ossia 2^{mme}, 26.

Si otterrebbe nella stessa maniera il valore del punto.

134. Non vi è cosa più facile adesso che di ridurre a

metri, ed a parti decimali del metro un numero qualunque di tese, piedi, e pollici. Sian per esempio, 13 tese, 5 piedi, 3 pollici, e 8 linee.

Le	13	tese danno	25,33752
I	5	piedi	1,62420
I	3	pollici	0,08121
Le	8	linee	0,01808
		Totale. . . .	27,06101

135. L'auna di Parigi, contenendo 3 piedi, 7 pollici, 10 linee $\frac{5}{6}$, ridotta in linee, riducesi alla frazione $\frac{3151}{5184}$ della tesa; e la tesa essendo i $\frac{27000}{13853}$ del metro, l'auna sarà i $\frac{3161}{5184}$, di $\frac{27000}{13853}$ del metro; il che riducesi, in decimali, a 1m, 18845.

156. Il peso si misurava per lo avanti in *libre*, *marchi*, *oncie*, *grossi*, *grani*, *e frazioni di grano*.

La libbra è composta	di	2 marchi
Il marco	di	8 oncie
L' oncia	di	8 grossi
Il grosso	di	72 grani.

È stato trovato, per mezzo delle esperienze delicatissime, che il chilogrammo pesa 18827 grani. Convertendo questo numero in frazioni della libbra, come io l'ho fatto a riguardo di quello ch'esprime il metro per il piede, avremo, il rapporto della libbra al chilogrammo, e ne dedurremo da cio i rapporti delle suddivisioni della libbra con le parti decimali del grammo.

Troveremo 1.° Che la libbra è i $\frac{9216}{18827}$ del chilogrammo ovvero ochil., 48951 in decimali;

2.° Che l'oncia, ovvero la sedicesima parte della libbra

equivale a $\frac{576}{18627}$ di chilogrammo, ovvero ochil., 03059, in decimali.

3.° Che il grosso, ovvero l'ottava parte dell'oncia, equivale a $\frac{72}{18827}$ di chilogrammo, ovvero ochil., 00382 in decimali.

4.° Che il grano, ovvero, la settantaduesima parte del grosso, equivale a $\frac{1}{18827}$ di chilogrammo, ossia ochil., 00005 in decimali.

Con questi resultati nulla è più agevole che convertire in misure decimali un peso qualunque espresso dalle antiche misure. Siano, per esempio, 23 libbre, 4 oncie, 5 grossi, e 31 grani.

		chil.
Si ha per	23 libbre	11,25873
per	4 oncie	0,12236
per	5 grossi	0,01910
per	31 grani	0,00155
Totale. . . .		chil. 11,40174.

137. L'Unità monetaria dell'antico sistema era la *lira tornese*. Il valor d'un franco, dato dalla moneta di 5 fr., essendo stato paragonato a quello della lira tornese, data dallo scudo di 6 lire, n'è risultato, che il valore del franco sta a quel della lira tornese come 81 a 80. Per convertir dunque una somma di lire tornesi in franchi, bisognerà prenderne $\frac{80}{81}$, ovvero moltiplicarla per 0,98765.

Reciprocamente, per valutare una somma di franchi in

lire tornesi, bisognerà prenderne $\frac{81}{80}$, ovvero moltiplicarla per 1,0125.

Se la somma da ridursi fosse 100 franchi, otterrebbesi 101,25, ovvero 101 lire 1. $\frac{1}{4}$.

La lira tornese si divide in 20 soldi, ciascun soldo in 12 denari. Nell' uso ordinario si confonde la lira col franco. In quest' ipotesi, la quale non è che approssimativa ciascun soldo equivale a $\frac{1}{20}$ decimo, ovvero 0,05; ed un denaro essendo la dodicesima parte del soldo, equivale a $\frac{1}{12}$ di 0,05, ovvero 0,0041666, ec.

Per facilitare le conversioni delle antiche misure in nuove, si son riuniti in alcune tavole poste alla fine di questo Trattato, i resultati ottenuti nel n. 133, come nel precedente, con tutti quelli che si troverebbero paragonando nella stessa maniera le misure corrispondenti dell' antico sistema, e del sistema metrico decimale. Vi si sono pure uniti i rapporti delle principali misure, e monete forestiere con quelle del sistema medesimo.

138. Nella stessa maniera che, pel rapporto dell' auna alla tesa, ho paragonato questa prima misura col metro, avrei parimente potuto paragonare ancora col metro tutte le misure straniere; il rapporto delle quali colle nostre antiche è già conosciuto. L' esempio seguente, benchè fittizio, servirà per porre in istato d'applicare il metodo a tutti i casi, i quali possono presentarsi, e darà un'idea della *regola congiunta*, la quale spesso si pratica nelle operazioni risguardanti il *cambio* delle monete.

Supposto che 3 *lire* di Francia equivalgano a 32 *danari sterlini* d' Inghilterra; che 240 denari sterlini equivalgano a 408 *danari di grosso* d' Olanda; che 50 denari di grosso d' Olanda; equivalgono a 190 *maravedis* di Spa-

gna : si domanda quanti maravedis fanno 90 lire di Francia ?

1.° Poichè 3 lire di Francia fanno 32 denari sterlini, la lira è $\frac{32}{3}$ di danaro sterlino.

2.° Poichè 240 denari sterlini equivalgono a 408 denari di grosso, il denaro sterlino è $\frac{408}{240}$ di denaro di grosso.

3.° Poichè 50 denari di grosso equivalgono a 190 maravedis, il denaro di grosso è i $\frac{190}{50}$, di maravedis.

Si convertirà dunque la lira di Francia in maravedis prendendo i $\frac{32}{3}$ dei $\frac{408}{240}$ dei $\frac{190}{50}$; il che somministrerà.

$$\frac{32 \text{ per } 408 \text{ per } 190}{3 \text{ per } 240 \text{ per } 50};$$

per il rapporto della lira al maravedis; e moltiplicando questo rapporto per 90, avremo il valore di 90 lire di Francia, espresse in maravedis, e vale a dire.

$$\frac{90 \text{ per } 32 \text{ per } 408 \text{ per } 190}{3 \text{ per } 240 \text{ per } 50}.$$

Questo numero frazionario è capace di una espressione molto più semplice, perchè il numeratore, ed il denominatore hanno dei fattori comuni. Nel primo 90, e 190 sono divisibili per 10; lo stesso succede di 240, e 50 nel secondo; ed essendo eseguita la divisione, otterremo.

$$\frac{9 \text{ per } 32 \text{ per } 408 \text{ per } 19}{3 \text{ per } 24 \text{ per } 5}$$

Ma 32 nel numeratore essendo divisibile per 8, come pure 24 nel denominatore, avremo

$$\frac{9 \text{ per } 4 \text{ per } 408 \text{ per } 19}{3 \text{ per } 3 \text{ per } 5};$$

e siccome 3 per 3 fa 9: potremo sopprimere questo fattore ad un tempo nel numeratore, e nel denominatore, e ne risulterà $\frac{4 \text{ per } 408 \text{ per } 19}{5}$ ovvero 6201 $\frac{3}{5}$ maravedis per 90 lire di Francia.

DEL CALCOLO DEI NUMERI COMPLESSI.

139. I numeri, che contengono insieme *tese, piedi, pollici, linee, e punti*; *o libbre, oncie, grossi, e grani*; *o lire, soldi, e denari*, trovandosi rapportati a delle unità differenti, e la loro espressione essendo composta di più parti, sono stati chiamati *numeri complessi*: quelli, che non ne contengono che una sola, sono chiamati *incomplessi* (*). Si effettuano immediatamente sopra i numeri complessi le quattro operazioni fondamentali dell Aritmetica con dei metodi, che spiegherò adesso, per porre in istato di seguitare gli antichi calcoli, benchè sia da desiderarsi che si renunzi totalmente a delle operazioni, per le quali i decimali s'impiegano così felicemente.

Ciò, ch'io dirò sopra i numeri complessi usitati in Francia, applicherebbesi senza pena a tutti quelli, che possono risultare dalle Misure straniere, e dalle loro suddivisioni.

(*) I numeri accompagnati da frazioni decimali non debbon ricevere questa denominazione; imperochè si possono a prima vista convertire in una sola specie d'unità. 34mi e 95, per esempio, riducansi a 34945 centimetri

DELLA SOMMA DEI NUMERI COMPLESSI.

140. L'addizione dei numeri complessi riposa sopra i medesimi principj di quella dei numeri incomplessi: si tratta sempre di riunire tra loro delle parti dello stesso valore; ed allorchè se ne trovan tante per formare una, o più parti d'un ordine superiore, si ritengon quest'ultime per comprenderle nella somma di quelle, che sono scritte nei numeri proposti nello stesso modo che nella somma semplice si riportano le decine d'una colonna sulla seguente a sinistra. Debbonsi dunque disporre i numeri complessi, che si voglion addizionare, in modo che le loro unità, o parti dello stesso valore, sieno in una colonna medesima, e far separatamente la somma di ciascuna di queste colonne, rammentandosi quante unità, o parti di ciascun ordine son necessarie per compor quelle dell'ordine immediatamente più considerabile.

Ecco un esempio su delle lire, soldi:, e denari

984 lir.	12 s.	8 d
38	6	9
1413	14	10
319	18	2
256	12	5

Addizionando primieramente i denari tra loro, perchè queste sono le parti di minor valore, ed abbracciando nel medesimo tempo le unità, e le decine di questi numeri, si trovano 29 denari, ma siccome 12 fanno un soldo, questa somma riducesi a 2 soldi, e 5 denari: non si scrivono dunque che i 5 denari, e si ritengono i soldi per portarli alla loro colonna.

In questa si sommano separatamente le unità, e le diecine. Le prime danno 22, unendoci i 2 soldi ritenuti sopra i denari; non si scrivono che le due unità, e si ritengono le due diecine per la colonna seguente, la cui somma si e-

leva con questo mezzo a 5 diecine: ma siccome la lira, composta di 20 soldi, contiene due diecine, si ottiene il numero delle lire risultanti dai soldi dividendo quello delle diecine di soldi per 2. Si ottiene 2 per quoziente, e 1 di resto, che si scrive sotto la colonna dove si opera; mentre che si ritengono le lire per la seguente a sinistra. A partir da quest'ultima, l'operazione s'effettua come quella dei numeri incomplessi, e si trova 2756lir. 12s. 5d.

141. Non ridurrò in regola questo metodo, ch'è facile d'adattare a quelle suddivisioni dell'unità, che vorremo; e per dare occasione d'eseguirla, porrò qui sotto un esempio in tese, piedi, pollici, linee, e punti, che il Lettore potrà verificare da se stesso, rammentandosi che 12 punti fanno 1 linea. 12 linee, 1 pollice, 12 pollici 1 piede, 6 piedi 1 tesa.

	34 tese	5 piedi	6 pollici	7 linee	8 punti
	16	3	2	5	6
	127	4	10	11	9
Somma	179	1	8	0	11

DELLA SOTTRAZIONE DEI NUMERI COMPLESSI.

142. Questa sottrazione si effettua nella stessa maniera che per numeri incomplessi, cangiando solamente ciò che rapportasi alla subordinazione della unità, allorchè siamo obbligati di prendere in prestito sulle parti di maggior valore, onde poter render possibile le sottrazioni parziali, ove il numero inferiore sorpassi il superiore.

Sia, per esempio

	795 lir.	3 s.	0 d.
	684	17	4
Differenza . . .	110	5	8

In questa sottrazione bisogna primieramente prendere in prestito 1 sulla colonna dei soldi, ovvero 12 denari, per toglierne i denari del numero inferiore; e s'ottiene per resto 8 denari. Per la colonna dei soldi, ove non resta più che 2 nel numero superiore, bisogna fare su quella delle lire l'imprestito di 1 lira, ovvero 20 soldi; per ottenere 22 soldi; dai quali togliendone 17, ne resta 5; allor passeremo alla colonna delle lire, dove si conterà la cifra superiore per un'unità di meno, e termineremo l'operazione secondo il metodo concernente i numeri incomplessi.

L'esempio seguente preso in misure di peso terminerà di schiarir questo metodo.

	libbre	marchi	oncie	grossi	grani
	19	0	4	5	37
	4	1	3	9	49
Differenza	14	1	0	6	60.

Per fare la sottrazione nella colonna dei grani, bisogna prendere in prestito 1 nella colonna dei grossi, e rammentarsi che questa unità equivale a 72 grani; unirli a mente ai 37, che sono scritti nel numero superiore, il che fa 109 grani dai quali togliendone 49 restan 60. Si continua la sottrazione nell'altre colonne contando 1 oncia per 8 grossi, 1 marco par 8 oncie, 1 libbra per 2 marchi,

Farò osservare in quest'occasione quanto la sconnessione, che trovasi nelle suddivisioni delle diverse unità, dee portare imbarazzo nelle operazioni sui numeri complessi, ed in particolare quanto fosse poco comodo la divisione del grosso in 72 grani, la qual conduceva sempre a dell'operazioni parziali assai complicate.

Darò ancora un esempio in tese, e suddivisioni della tesa, tanto per esercitare il lettore su questa specie di misure, quanto per far vedere come dobbiam contenerci allorchè mancano nel numero maggiore alcune delle parti contenute nell'altro:

	19 tese	0 pie di	0 pollici	0 linee	0 punti
	4	3	6	8	5
Differenza	11	2	5	3	6.

Per fare la sottrazione nella colonna dei punti non si può prendere in prestito che si quella delle tese; e ciò si fa decomponendo

1 tesa in 5 piedi più 11 pollici più 11 linee più 12 punti.

S' immaginano questi numeri di piedi, di pollici, di linee, e di punti, respittivamente posti nelle loro colonne, per toglierne successivamente ciascuno dei numeri inferiori corrispondenti: il che somministra i resti scritti al disotto. Si passa in seguito alla colonna delle tese contando per 1 di meno la cifra delle unità.

DELLA PROVA DELL' ADDIZIONE

E DELLA SOTTRAZIONE DE' NUMERI COMPLESSI.

143. La prova dell' addizione si fa pure coi medesimi principj che pei numeri incomplessi; fa di mestieri soltanto, passando alle suddivisioni delle unità, sostituire al rapporto decimale, il valore di ciascuna parte a riguardo di quella, che la seguita a destra. Sian, per esempio

984 lir.	12 s.	8 d.
38	6	9
1413	14	10
319	18	2
2756	12	5
1122	22	0.

S'opra sulle lire secondo la regola del n.° 19. poi si convertono le 2 lire in diecine di soldi, il che dà 4 di queste diecine, le quali unite a quella che trovasi scritta nella colonna, formano il numero 5, da cui si tolgono le 3 unità di questa colonna; si pone al disotto il resto 2, il quale si conta per delle diecine in rapporto alle 2 unità della colonna seguente. Restano ancora 2 soldi, che bisogna convertire in denari; si sommano i 24 denari, che ne risultano, coi 5 che vi son scritti, e si ha un totale di 29, il quale bisogna trovare mediante la somma dei danari di tutti i numeri, poichè queste sono le parti di minor valore. Questo è ciò che difatto succede, e che dimostra che l' operazione è esatta.

Io non mi tratterrò nell'esporre la riprova della sottrazione, perchè dessa s' eseguisce col mezzo d'una somma (20); e digià abbiamo veduto precedentemente come s'effettuano quelle dei numeri complessi.

DELLA MOLTIPLICAZIONE DEI NUMERI COMPLESSI.

144. La moltiplicazione dei numeri complessi non presenta nessuna difficoltà allorchè ben si possiede la teoria delle frazioni; poichè in primo luogo si posson cangiare il moltiplicando, e il moltiplicatore in numeri frazionarj mediante i rapporti di ciascuna suddivisione dell' unità con quella, che la precede, come lo abbiamo fatto nei numero 131, e 136 pei valori del metro in rapporto alla tesa, e del chiliogrammo in rapporto alla libbra.

Se s'avessero, per esempio, 15 lire, 12 soldi, e 4 denari, si ridurrebbero in primo luogo le lire a soldi moltiplicandole per 20. ed avrebbesi 300 da unirsi ai 12, che si trovano scritti, il che cangerebbe il numero proposto in 312 soldi, e 4 denari; si moltiplicherebbero pure i soldi per 12 affine di convertirli in denari; otterrebbesi 3744; ed aggiungendovi i 4 denari scritti, ne risulterebbero 3748 denari. Ciò fatto, s'osserverebbe che la lira, contiene 20 soldi, il soldo 12 denari, la lira contiene 20 volte

12 ovvero 240 denari, e che perciò 1 denaro è $\frac{1}{240}$ della lira, dal che risulta che 3748 denari fanno $\frac{3748}{240}$ della lira.

Se bisognasse moltiplicar questo numero per 7 tese e 4 piedi, si cangerebbero parimente 7 tese e 4 piedi in 46 piedi, ovvero $\frac{46}{6}$ di tesa; si farebbe, secondo la regola del numero 76, il prodotto delle frazioni $\frac{3748}{240}$ e $\frac{46}{6}$, il che darebbe $\frac{172408}{1440}$; ed osservando che l'unità del prodotto debb'essere della medesima specie di quella del moltiplicando (102), valuterebbesi, come segue, questa frazione mediante la lira tornese, e sue suddivisioni.

172408	1440
2840	
14008	119liv. 14s 6d $\frac{2}{3}$
1048	
20	
20960s	
6560	
800	
12	
9600	
960	

La parte intera del quoziente della divisione del numeratore per il denominatore darebbe immediatamente le lire tornesi; poi moltiplicherebbesi il resto 1048 per 20; onde convertirlo in soldi; dividerebbesi il prodotto 20960 per il divisore 1440, ed il quoziente 14 sarebbe il numero dei soldi i quali debbono accompagnare le lire di già trovate. Il secondo resto 800 si convertirebbe in denari, moltiplicandolo per 12; finalmente dividerebbesi il prodot-

to 9600 per il divisore 1440, ed avrebbesi 6 denari da unirsi alle due prime parti del quoziente, colla frazione $\frac{960}{1440}$, la quale riducesi a $\frac{2}{3}$.

Quest' ultima operazione, la quale può applicarsi a qualunque siasi specie di misura, riposa su ciò che qualunque numero frazionario può essere considerato come l' indicazione d'una divisione, la quale si rende sempre possibile convertendo il numeratore in parti in più, in più piccole, come lo abbiamo fatto a riguardo dei decimali nel numero 95.

145. I metodi, che si seguono per ordinario nella moltiplicazione dei numeri complessi, probabilmente immaginati dagli uomini, i quali non se n' occupavano che per giungere al resultato, sembrano a prima vista men semplici, e men generali di quello del numero precedente, ma essi son forse più comodi nella pratica; i medesimi offrono altronde quel carattere d' ingegno, che trovasi in tutte le invenzioni suggerite dal bisogno, alle quali s' arriva come per istinto, senza concepir bene precisamente l' estensione, e l' ordine del soggetto che isviluppano in seguito quelli, i quali si son dedicati unicamente alla meditazione.

Seguito l' andamento, che i primi aritmetici hanno tenuto, pricipiando da alcuni esempj. Sia la moltiplicazione.

	lir.	s
di	25	12
per	16	
	150	
	25	
prodotto per 10 soldi	8	
per 2 soldi	1	12
Prodotto totale....	4009	12.

Qui il moltiplicando solo è complesso; si tratta di ripe-

terlo 16 volte, il che s'effettua coi soliti metodi sulla parte intera; poi s'osserva che se si aggiungesse 1 al moltiplicando 25, il prodotto sarebbe aumentato precisamente del moltiplicatore 16, e che lo sarebbe della metà solamente, se non si fosse aggiunta al moltiplicando che la metà di 1 lira. Dietro a ciò, se si avessero 10 soldi in seguito delle lire del moltiplicando, bisognerebbe scrivere nel prodotto 8 unità, metà del moltiplicatore; ma in luogo di 10 soldi ve ne son 12; restan dunque ancora 2 soldi, di cui bisogna tener conto: ora, questi due soldi, essendo la 5a parte di 10, non debbono aumentare il prodotto che della 5a parte di ciò che hanno dato i 10 soldi; prenderemo in conseguenza la 5a parte delle 8 lire precedentemente trovate, per scriverle sotto il prodotto, il che darà 1 lira e 12 soldi. La somma di tutti questi prodotti parziali sare il prodotto totale domandato, cioè, 409 lire e 12 soldi.

146. Decomponendo nella stessa maniera in parti che siano contenute esattamente nell' unità del moltiplicando, ovvero l' une nell' altre, le suddivisioni, le quali accompagnano le unità del maggior valore, oppure le *unità principali* del moltiplicando, altro non dobbiam fare che prendere delle parti simili sul moltiplicatore; ovvero sui prodotti di già formati. Queste parti si dicono *aliquote*; ne conosceremo bastantemente l' uso mediante l' esempio, che segue.

	34lir.	19s.	3d. $\frac{1}{3}$		
	18				
	272				
	34				
Per 10 soldi	9				
per 5 soldi	4	10			
per 4 soldi	3	12			
per 1 soldo.				0s.	18s.
per 3 denari.		4	6		
per 1 denaro				1s.	6s.
per $\frac{1}{3}$ di dentro. . . .		0	6		
Totale . . .	629lir.	7s.	0d.		

Dopo d'aver formati i prodoti delle unità principali del moltiplicando per ciascuna cifra del moltiplicatore, s'opera come segue a riguardo delle suddivisioni del moltiplicando.

Si decompongono 19 soldi in 10 soldi, più 5 soldi, più 4 soldi.

Pei 10 soldi, si prende la metà del moltiplicatore;

Pei 5 soldi, la metà del prodotto precedente;

Pei 4 soldi, il quinto del moltiplicatore.

Siccome dai soldi bisogna passare ai tre denari, i quali non sono che il quarto d'un soldo, ed in conseguenza la la sedicesima parte di 4 soldi, potrebb' essere un poco difficile prendere a un tratto la 16ma parte del prodotto di 4 soldi. Per evitare quest' imbarazzo, se ne prende primieramante il quarto, il che forma il prodotto, che darebbe un soldo, e poi si prende di nuovo il quarto di questo

ultimo prodotto: si ha in tal maniera il prodotto relativo a 3 denari; ma si ha l'attenzione di portar più avanti verso la destra le cifre del prodotto precedente, il quale non avendo servito che ha formare quest'ultimo, non dee far parte del prodotto totale (*). S'ottiene parimenti il prodotto relativo a $\frac{1}{3}$ di denaro, formando in primo luogo quello di 1 denaro per mezzo di quello di 3, e si porta avanti come sopra il prodotto di 1 denaro. Si riuniscono in seguito tutti gli altri prodotti parziali e la loro somma è il dimandato prodotto.

Ecco ancora un esempio sulla tesa, e sue suddivisioni.

	6 tese	3 piedi	5 pollici	2 linee
	5			
	30			
Per tre piedi	2	3		
Per 1	0	5		
Per tre pollici		1	3	
Per 1		0	5	
Per 1		0	5	
Per 2 linee.		0	0	10
Totale	32	5	1	10

Abbiam scritto due volte il prodotto di un pollice, invece di formare tutto ad un tempo il prodotto di 2 pollici, prendendo la 6a parte di quello di 1 piede, perchè

(*) Gli Aritmetici danno ai prodotti, ch'essi non cercano se non che per trovarne degli altri, la denominazione di *falso prodotto*, la quale è sicurissimamente pessima.

si aveva bisogno del prodotto di 1 pollice onde ottenere comodamente quel di 2 linee.

147. Allorchè il moltiplicatore solo è complesso, si decompongono nello stesso modo che sopra in parti aliquote dell'unità principale le suddivisioni, che esso contiene, e s'effettuano sul moltiplicando le operazioni, che desse indicano. In questo caso è importante il distinguere dallo stato del problema qual dei due numeri proposti debb'esser preso per moltiplicando; imperocchè, determinando la natura delle unità del prodotto cercato, si formano i rapporti delle suddivisioni, alle quali bisogna discendere, prendendo i prodotti relativi alle parti aliquote, sulle quali ci potremmo molto ingannare, poichè le suddivisioni del moltiplicando, e del moltiplicatore seguono leggi diverse quando questi due numeri non sono della medesima specie. Sia per esempio.

703^{lire}

9^{marchi} 3^{once} 5^{grossi} 7^{grani} $\frac{1}{2}$

	7137 lire	s.	d.				
Per 2 once	198	5					
Per 1 once	99	2	6				
Per 4 grosi . . .	49	11	3				
Per 1	12	7	9	$\frac{3}{4}$			
Per 12 grani. . .					$2^{d.}$	1^{s}	3^{d} $\frac{5}{8}$
Per 6 grani . . .	1	0	7	$\frac{13}{16}$			
Per 1.	0	3	5	$\frac{29}{96}$			
Per $\frac{1}{2}$	0	1	8	$\frac{125}{192}$			
Totale.	7497	12	4	$\frac{99}{192}$			

In quest' esempio si è preso

per 2 oncie, $\frac{1}{4}$ del moltiplicando;

per 1 , $\frac{1}{2}$ del prodotto precedente;

per 4 grossi, $\frac{1}{2}$ del prodotto di 1 oncia;

per 1 , $\frac{1}{4}$ del prodotto precedente.

Ma siccome il grosso contiene 72 grani, abbiamo primieramente preso il sesto del prodotto relativo ad un grosso, affine d'avere il prodotto relativo a 12 grani, ed abbiam preso in seguito

per 6 grani, $\frac{1}{2}$ del prodotto di 12;

per 1 , $\frac{1}{6}$ del prodotto precedente;

per $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ di quest' ultimo prodotto.

Questi diversi prodotti sono accompagnati da frazioni, che bisogna addizionare insieme; il che s'effettua facilmente col metodo del n. 69, perchè il maggiore dei denominatori contenendo tutti gli altri, si possono convertire tutte le frazioni nella specie dell' ultima; trovasi per la loro somma $\frac{483}{192}$, ovvero 2 $\frac{99}{192}$: aggiungendo questi 2 denari a quelli che sonosi già scritti, e continuando la somma dell' altre colonne, si conseguisce il prodotto totale.

148. Finalmente, allorchè il moltiplicando, ed il moltiplicatore sono ambedue complessi dopo d' aver fatti i prodotti delle unità principali del moltiplicando per quelle del moltiplicatore, si prendono in primo luogo, solamente sulle unità principali del moltiplicatore, le parti aliquote, nelle quali si decompongono le suddivisioni del moltiplicando; di poi si decompongono le suddivisioni del moltiplicatore in parti aliquote della sua unità principale, e si

eseguiscono sopra tutto il moltiplicando le operazioni, ch'esse indicano.

Per comprendere l'esattezza di questo metodo, serve osservare che il prodotto cercato deve contenere tre parti, cioè, il prodotto delle unità principali del moltiplicando per quelle del moltiplicatore; quello delle suddivisioni del moltiplicando per le unità principali del moltiplicatore; e finalmente il prodotto di tutto il moltiplicando per le suddivisioni del moltiplicatore.

Difatto quest'operazione può ridursi alla moltiplicazione di due fattori composti d'un intero unito ad una frazione; e se si avesse, per esempio, $8\frac{2}{3}$ da moltiplicare per $6\frac{5}{7}$, il prodotto si comporrebbe evidentemente di 8, e di $\frac{2}{3}$, ripetuti ciascuno 6 volte più $\frac{5}{7}$ di volta.

149. L'esempio seguente schiarirà questi principj, e ne farà conoscere l'applicazione.

84^{lire}	$6^{\text{s.}}$	$3^{\text{d.}}$	$\frac{1}{3}$	
15^{tese}	4^{piedi}	$6^{\text{pol.}}$	$8^{\text{lin.}}$	

	420 lire	soldi	denari			
	84					
per 5 soldi....	3	15				
per 1.....	0	15				
per 3 denari..	0	3	9			
per 1.....				0^{s}	1^{s}	3^{d}
per $\frac{1}{3}$	0	0	5			
per tre piedi..	42	3	$1\frac{2}{3}$			
per 1.....	14	1	$0\frac{5}{9}$			
per 6 pollici..	7	0	$6\frac{5}{18}$			
per 1.....				1	3	$5\frac{5}{108}$
	1	3	$5\frac{5}{108}$			
per 6 linee....	0	11	$8\frac{113}{216}$			
per 2.....	0	3	$10\frac{545}{648}$			
	1328	14	$5\frac{70}{81}$			

Abbiamo preso in primo luogo sulle 15 unità principali del moltiplicatore le parti aliquote, nelle quali si decompongono i 6soldi 3denari $\frac{1}{3}$ del moltiplicando; abbiamo preso in seguito sopra tutto il moltiplicando le parti ali-

quote, che formano i 4piedi 6pollici 8linee del moltiplicatore: addizionando le frazioni, abbiamo ottenuto 2 interi e $\frac{560}{648}$; frazione, la cui più semplice espressione è $\frac{70}{81}$: si sono addizionati quest'interi colla somma della colonna dei denari; e si è terminata la somma secondo la regola del n. 140.

150. Il più spesso si trascurano le frazioni, le quali rendono il calcolo assai complicato allorchè se ne vuol tenere conto; ma in tal maniera il resultato può trovarsi difettoso di qualche unità nella colonna delle suddivisioni di minor valore. Eviterebbesi quest'errore, ed insieme l'imparazzo che dà la somma delle frazioni ordinarie, convertendo in decimi il resto che lasciano nella formazione di ciascun prodotto parziale le ultime suddivisioni del prodotto antecedente, e fintantochè non avremo dieci di questi prodotti, saremo sicuri d'avere il resultato esatto fino alle ultime unità.

Ecco un esempio relativo all'auna.

Trattasi di trovar ciò, che debbasi pagare per aune 15 $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{16}$ d'una stoffa, il prezzo dell'auna essendo di 42l. 17 11d.

	42l.	17s.	11d.
	15	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{16}$
	210		
	42		
per 10 soldi.....	7	10	
5	3	15	
2	1	10	
per 6 denari.		7	6
3		3	9
1		2	6
per $\frac{2}{1}$ auna...	21	8	11, 5
$\frac{1}{4}$	10	14	5, 7
$\frac{1}{16}$.....	2	13	7, 4
Prodotto totale.	678	5	9, 6.

I 17 soldi del moltiplicando si decompongono in 10 soldi, più 5, più 2: si prende per 10 soldi la metà di 15; per 5, la metà del prodotto precedente, per 2, la 5a parte del prodotto relativo a 10 soldi. I $\frac{3}{4}$, che sono scritti nel moltiplicatore, si decompongono in $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$: si prende la metà di tutto il moltiplicando, poi per $\frac{1}{4}$ la metà del prodotto precedente, quindi finalmente per $\frac{1}{16}$ la quarta parte di quest' ultimo prodotto. Nel prodotto totale non

si fa alcun conto della cifra dei decimi di denaro, perchè dessa non è sempre esatta, a motivo delle frazioni di decimo, che sonosi trascurate.

151. Tutto ciò, che abbiamo veduto sulla moltiplicazione dei numeri complessi, essendo ridotto a regola, può enunciarsi così: *Moltiplicare in primo luogo le unità principali del moltiplicando per quelle del moltiplicatore; decomporre le suddivisioni del moltiplicando in parti aliquote de la sua unità principale, ovvero delle parti aliquote, che le precedono; valutare queste frazioni sulle unità principali del moltiplicatore solamente; decomporre in seguito le suddivisioni del moltiplicatore in parti aliquote della sua unità principale; ovvero delle parti aliquote, che le precedono, e valutar queste frazioni sopra tutto il moltiplicando. Allorchè la frazione da valutarsi sarà troppo piccola in riguardo di quella, alla quale rapportasi, se ne faciliterà il calcolo prendendone una parte aliquota intermedia, per formare un prodotto ausiliario, dal quale ne dedurremo la parte aliquota cercata, e di cui ne porteremo in seguito le cifre più avanti verso la destra, onde non comprenderle nelle addizioni dei prodotti parziali, i quali debbon comporre il prodotto totale.*

DELLA DIVISIONE DE' NUMERI COMPLESSI.

152. È importantissimo, per eseguire la divisione dei numeri complessi, di far attenzione alla natura delle unità del quoziente, perchè da ciò dipende la conversione dei resti nelle suddivisioni di queste unità: ma l'esame attento del problema non lascia mai dubbio a questo riguardo, soprattutto allorchè, considerando il dividendo come un prodotto, si determina quali han dovuto essere il moltiplicando, ed il moltiplicatore, così come l'abbiam fatto nel n.° 105.

Incontreremo in tal maniera due casi diversi: nell'uno il dividendo, ed il divisore essendo di differente natura, il quoziente debb'essere della medesima specie del dividendo; nell'altro il dividendo, ed il divisore essendo della

specie medesima, il quoziente debb'essere d'una specie diversa. L'operazione concernente a quest'ultimo caso essendo più semplice che per il primo, vado immediatamente a occuparmene.

153. Ecco un problema il quale conduce a questo caso. Il prezzo d'una tesa di lavoro costando 36 lire, 15 soldi, e 6 denari, si domanda quanto di questo lavoro potremo fare con 1689 lire e 17 soldi? Qui il dividendo 1689 lire e 17 soldi è composto colle 36 lire, 15 soldi, e 6 denari della stessa maniera come il numero che misura il lavoro cercato, è composto colla tese, e sue suddivisioni: onde il quoziente debb'essere espresso da quest'ultime misure.

Per ottenerlo, si considera che il suo valore non deve cangiare allorchè si convertono il dividendo, ed il divisore in parti dello stesso valore, poichè le frazioni del medesimo denominatore danno lo stesso quoziente che quello dei loro numeratori; ma riducendo nel medesimo tempo il dividendo, ed il divisore in denari, i quali sono le parti di minor valore che i numeri stessi contengono, renderemo questi numeri incomplessi.

Il dividendo 1689 lire, e 17 soldi dà 405564 denari ed il divisore 36 lire, 15 soldi, e 6 denari, ne somministra 8826: allora riguardasi il dividendo come se fosse composto di tese, ed il divisore come un numero astratto: imperciocchè, se la tesa non costasse che un denaro, se n'avrebbero 405564. laonde costando 8826 denari, non si dee prendere se non che la 8826ma parte del primo numero: l'operazione dunque si stabilisce nel modo seguente.

405564	8826
52524	45^{tese} 5^{piedi} $8^{pollici}$ 5^{linee} $\frac{6270}{8826}$
8394	
6	
50364	
6234	
12	
12468	
6234	
74808	
4200	
12	
8400	
4200	
50400	
6270	

Dopo d'avere ottenuto le unità principali del quoziente, si moltiplica per 6 il resto 8394 tese, onde convertirlo in piedi, il che dà 50365; si continua la divisione, si mette il quoziente nel posto dei piedi; si moltiplica per 12 il resto 6234 di quest' ultima operazione affine di convertirlo in pollici; si divide il prodotto 74808 pel divisore, e s'ottiene il numero dei pollici da scriversi nel quoziente: si moltiplica ancora il resto 4200 per 12, onde convertirlo

in linee: la divisione del prodotto 50400 per il divisore somministra il numero delle linee da scriversi nel quoziente: e fermandosi quì, si termina questo quoziente colla frazione $\frac{6270}{8826}$, la quale riducesi alla sua espressione più semplice. Il resultato finale dell'operazione è 45 tese, 5 piedi, 8 pollici, 5 linee $\frac{1045}{1471}$.

La forma di questo metodo resterebbe la stessa quando i numeri proposti, ed il loro quoziente si rapportassero ad unità di qualunque altra specie.

154. Allorchè il quoziente debb'essere della medesima specie del dividendo, e che il divisore è incomplesso, l'operazione s'effettua come quella del n. 144.

Per esempio, 27 oncie d'un certo metallo sono costate 169 lire, 11 soldi, e 4 denari: si domanda a quanto ascenda il costo di un'oncia? Ecco l'operazione;

169l.	11s.	4d.	27
7			6l. 5s. 7d $\frac{7}{27}$
20			
140			
11			
151			
16			
12			
32			
16			
192			
4			
196			
7			

Allorchè siamo arrivati alle 6 lire, le quali debbono entrar nel quoziente, si converte il resto 7 in soldi, e vi s'uniscono gli 11, che sono scritti nel dividendo: poi si divide il resultato 151 pel divisore 27: si hanno 5 soldi nel quoziente; si moltiplica il resto 16 per 12, onde convertirlo in denari; vi s'uniscono i 4 del dividendo; si divide il totale 196 pel divisore 27: si hanno per quoziente 7 denari e più la frazione $\frac{7}{27}$: il resultato compiuto è dunque 6 lire, 5 soldi, 7 denari $\frac{7}{27}$.

155. Finalmente, quando il dividendo, ed il divisore sono amendue complessi, e di specie differenti, bisogna convertir l'ultimo in frazione come s'è indicato nel n.° 144: ed allora la regola data per le frazioni nel n.° 79 conduce a moltiplicare il dividendo per il denominatore del divisore, ed a dividerne il prodotto, il quale può essere un numero complesso, pel numeratore del divisore, ch'è necessariamente incomplesso. Eccone un esempio:

36 tese, 5 piedi, 6 pollici, e 8 linee di lavoro essendo state pagate 1374 lire, 12 soldi, e 4 denari, dedurne il prezzo d'una tesa.

Il divisore, convertito nell'ultime suddivisioni delle sue unità principale, produce 31904 linee; e la tesa contenendo 864 linee, si ha $\frac{31904}{864}$ di tesa per la frazione, che lo rappresenta.

Moltiplicando in primo luogo il dividendo 1374 lire, 12 soldi, e 4 denari per 864, secondo il metodo del numero 146, si trovano 1187668 lire, e 16 soldi, ed altro non si deve far che dividere, come nel numero precedente, il complesso 1187668 lire, e 16 soldi per il numero incomplesso 31904; il che dà per quoziente 37 lire, 4 soldi, 6 denari $\frac{318}{997}$.

156. È a proposito d'osservare che il denominatore del-

la frazione, che si ottiene in primo luogo per rappresentare il divisore, è il numero delle parti del minor valore contenute nell'unità principale, di maniera chè si può enunciare così la regola precedente:

Affine di dividere un numero complesso per un altro numero complesso, fa di mestieri convertire il divisore in parti del minor volore, moltiplicare il dividendo per il numero delle parti di questo valore, contenute nell'unità principale del divisore, e dividere il secondo resultato per il primo.

Questa regola s' applicherebbe al caso sviluppato nel numero 153 se il dividendo non contenesse alcuna parte di minore valore dell'ultima del divisore: poichè, moltiplicare allora il dividendo per il numero delle parti di questo valore contenute nella sua unità principale, vuol dir convertirlo in queste parti.

157. Non si debbono trascurare i compendj, che può offrire la conversione del divisore in frazione, e la riduzion di quest'ultima alla sua espressione più semplice: ne resultano spesso maggiore facilità, e chiarezza nei calcoli.

La pratica reiterata di queste operazioni suggerisce pure certi metodi particolari, che semplificano il calcolo, e ch'io non giudico qui a proposito d' indicare; mi limiterò a dimostrare come si convertano immediatamente i soldi in lire.

In ciò siccome si tratta di dividere per 20 il numero proposto dei soldi, dividesi questo in primo luogo per 10, separando una cifra sulla sua destra; poi si prende la metà di quelle, che sono alla sinistra, il che divide per 2, e dà in conseguenza lire. Allorchè resta un' unità, dessa rappresenta una decina di soldi, e bisogna unirla alla cifra separata sulla destra, la quala esprime dei soldi.

In tal maniera 3579 soldi producono 357, 9, indi 178lire 19s.

258. Il paragone dei metodi, che ho presentati succes-

sivamente, è al certo la miglior prova che si possa dar del vantaggio, che procureranno le nuove misure allorchè queste saranno adottate; e per quanta assuefazione che s'abbia al calcolo dei numeri complessi non potremo fare a meno di non sentir tutto il comodo del calcolo decimale, salvo che non si continuasse a servirsi delle antiche Misure, il che esige, per ciascun resultato, la conversione di queste misure nelle nuove; operazione sempre lunga, assolutamente straniera rapporto al sistema metrico, e che a malgrado di ciò alcuni si ostinano a riguardarla come inseparabil dall'uso di questo sistema.

D'ALCUNI MEZZI IMPIEGATI PER ABBREVIARE I CALCOLI ARITMETICI.

159. Allorchè si debbono moltiplicare l'uno per l'altro due numeri considerevolissimi, è comodo formare immediatamente i prodotti del moltiplicando per ciascuna delle cifre del moltiplicatore, le quali non sian ripetute. Siano, per esempio, i numeri 2937487541, e 65431476. Osservo che il moltiplicatore non contiene che le cifre 1, 3, 4, 5, 6, 7; col moltiplicare successivamente per ciascuna di queste cifre il moltiplicando formo la seguente tavola

1	2937487541
2	5874975082
3	8812462623
4	11749950164
5	14687437705
6	17624925246
7	20562412787

nella quale prendo i prodotti del moltiplicando per le cifre 6, 5, 4, 1, 3, 4, 7, e 6 del moltiplicatore, onde collocarli nei posti, ch'essi debbon occupare, così come lo vediamo qui sotto; ed altro non mi resta da fare se non che una semplice addizione

17624925246
14687437705 .
11749950164 . .
2937487541 . .
8812462623 . . .
11749950164. . . .
20562412787 . . . .
17624925246 . . . . .

19807906187148969 6

Seguendo questo metodo, non si possono avere al più che 9 prodotti da formare, ed il resto dell' operazione riducesi ad una semplice addizione.

160. Si riduce la divisione a semplici sottrazioni, facendo primieramente i prodotti del divisore per i 9 primi numeri: Difatto, se si avesse 4539947812346 da dividersi per 73809, e si formasse una tavola contenente i multipli del divisore, cioè,

1	73809
2	147618
3	221427
4	295236
5	369045
6	442854
7	516663
8	590472
9	664281

potrebbesi operare nel modo seguente:

$$
\begin{array}{r|l}
4539947812346 & 73809 \\
\cline{2-2}
442854\ldots\ldots & 61509406\ \frac{64892}{73809} \\
\cline{1-1}
111407\ldots\ldots & \\
73809\ldots\ldots & \\
\cline{1-1}
375988\ldots\ldots & \\
369045\ldots\ldots & \\
\cline{1-1}
694312\ldots & \\
664281\ldots & \\
\cline{1-1}
300313\ldots & \\
265236\ldots & \\
\cline{1-1}
507746 & \\
442854 & \\
\cline{1-1}
64892 &
\end{array}
$$

Cerchisi nella tavola il multiplo, che più si approssima al numero espresso dalle sei prime cifre del dividendo; questo multiplo corrispondendo a 6, somministra 6 per la prima cifra del quoziente. Togliendo questo multiplo dal dividendo parziale, abbassando una cifra dippiù, e cercando qual sia il multiplo, che più s'approssima al nuovo dividendo parziale, trovasi 1 per la seconda cifra del quoziente. Si prosegue in tal maniera l'operazione sino alla fine per mezzo di sottrazioni.

161. Quando s'impiegano i decimali per arrivare ad un

certo grado d'approssimazione, si può compendiare assai la moltiplicazione operando nel modo, che adesso vedremo. Suppongo che trattisi di conoscere, esatto fino ai millesimi d'unità, il prodotto dei numeri 45,6259573, e 28,63449.

Osserveremo ch'è inutile fare entrar nel prodotto totale tutte le cifre, che nei prodotti parziali rapresentano dei decimali d'un ordine più elevato dei 100000mi; perchè la somma delle colonne, le quali contengono i decimali ulteriori e le ritenute che ne risultano, non possono influire sopra i millesimi; ed allora, per avere un prodotto composto di cento millesimi, partendo dalla cifra situata sulla sinistra del moltiplicatore, la qual esprime quì delle decine, serve cominciar la moltiplicazione della cifra 7 dei milionesimi del moltiplicando. Le cifre, che seguono quella delle diecine verso la destra, esprimendo delle unità di dieci in dieci volte minori, non cominceremo a loro riguardo la moltiplicazione se non che sulle cifre 5, 9, 5, ec., le quali seguono la cifra 7 verso la sinistra; perchè i 5 centomillesimi del moltiplicando moltiplicati per le 8 unità del moltiplicatore daranno dei cento-millesimi, nello stesso modo che i dieci-millesimi, del moltiplicando moltiplicati pei decimi del moltiplicatore, e nello stesso modo che i millesimi del moltiplicando moltiplicati pei centesimi del moltiplicatore, e così di seguito.

Per non errare nell'incominciamento di ciascuna moltiplicazione parziale, si scrivono sotto del moltiplicando le cifre del moltiplicatore in un ordine inverso; ponendo quella delle dicine del secondo, sotto i milionesimi del primo, come si vede quì appresso.

```
456259573
 9453682
---------
 91251914
 36500760
  2737554
 . . 136875
 . .  22810
 . .   1824
 . . .  405
---------
130652142
```

In questa maniera ciascuna cifra del moltiplicatore si trova posta sotto la cifra del moltiplicando, per la quale si deve cominciar la moltiplicazione; di manierachè si trascurano quelle, che sono alla destra, e si scrivono tutti i prodotti nelle colonne medesime, poichè desse cominciano tutte da unità del medesim' ordine. Riunendogli, e separando cinque decimali, perchè l' ultima cifra debb' essere dei cento-millesimi, si trova 1306,52132; scancellando le due ultime cifre, ha 1306,521: resultato, che accordasi sino ai millesimi con quel, che sarebbesi ottenuto mediante la moltiplicazione effettuata col metodo ordinario, e che sarebbe 1306,521644004.

Se succedesse che un dei fattori non avesse tante cifre, onde potere stabilire la corrispondenza suddivisata, vi si supplirebbe ponendo dei zeri alla destra di questo fattore. A fine di conseguire con due decimali, per esempio, il prodotto dei numeri 54,236 e 532,27, bisogna scriverli come segue

54236000
72235

271180000
16270800
1084720
108472
37961

288681953

Trovasi per il prodotto dimandato 28868, 20, aumentando l' ultima cifra d' un' unità perchè le due, che sopprimonsi, sorpassano la metà di quest' unità, cioè a dire 50.

È una regola generale, allorchè si trascurano alcuni decimali, d' aumentar sempre di una unità, l' ultimo, che si conserva, quando quelli, che si sopprimono, superano la metà dell' unità di quelle dell' ultimo posto, che si lascia sussistere. Affin di conoscerne la ragione, serve osservare che 34, 546, per esempio, s' avvicina di più a 34, 55 che a 34, 54.

Il metodo della divisione è capace d' un compendio analogo; ma siccome esige un maggior numero di precuazioni particolari par essere inpiegato con sicurezza, io non mi fermerò a farne parola.

162. Abbiamo veduto nei n. 60, 69 il partito, che si può ricavare dalla decomposizione dei numeri in fattori per semplificare i calcoli rilativi alle frazioni. È dunque importante di saper eseguire questa decomposizione: l' esempio seguente dimostrerà come alla medesima si pervenga.

Sia il numero 60: io lo divido primieramente per 2, ed ho per quoziente 180; divido questo quoziente per 2, ed ottengo 90, il quale dividesi parimente per 2, e dà

45: in tal maniera vedo digià che 360 è eguale a 2 per 2 per 2 per 45. Il numero 45 non essendo più divisibile per 2, lo divido per 3, ed ottengo 15 il quale divido ancora 3, e dà 5, numero primo, il quale non puo esser diviso se non che per se stesso, ovvero per l'unità: 45 è dunque eguale a 3 per 3 per 5, ed in conseguenza 360 è eguale a

2 per 2 per 2 per 3 per 3 per 5.

Questi sei fattori essendo dei numeri primi, sono i *fattori semplici* del numero 360. È manifesto che qualunque numero, il qual non e primo, può sempre così decomporsi in un certo numero di fattori semplici, o primi.

Per formare tutti i divisori del numero proposto, scrivesi il quoziente, che corrisponde a ciascun fattore, e questo fattore, in due colonne, come la seguente tavola lo fa chiaro

360	1	1
180	2	2
90	2	4
45	2	8
15	3	3 6 12 24
5	3	9 18 36 72
1	5	5 10 15 20 30 40 45 60 90 120 180 360.

Ora si vede alla terza linea che il numero proposto è stato diviso due volte di seguito per 2, desso è dunque divisibile per il prodotto di 2 per 2, ovvero per 4, il quale scriveremo allato al 2 nella terza linea. Il quoziente 90 essendo stato nuovamente diviso per 2 il numero proposto sarà in conseguenza divisibile per 2 volte 4, oppure per 8; scriverem dunque 8 allato del 2 sulla quarta linea. Il quoziente 45 scritto in principio di questa linea essendo ancora stato diviso per 3, il numero proposto sarà evidentemente divisibile pei prodotti di 3 moltiplicato

per ciascuno dei divisori precedenti: formeremo dunque sulla quinta linea i nuovi divisori composti 6, 12, 24. Continuando così a moltiplicare il fattore semplice di ciascuna linea per tutti i divisori che lo precedono, ed osservando di non scrivere due volte lo stesso, avremo tutti i divisori del numero proposto.

163. Allorchè siamo condotti dal calcolo ad una frazione, di cui il numeratore, e il denominatore sono un po' grandi, e non hanno frattanto alcun fattore comune, si cercano dei valori approssimativi di questa frazione, i quali siano espressi per mezzo di numeri più semplici, ad oggetto di potersene formare un'idea.

Se si ha, per esempio, il numero frazionario $\frac{1103}{887}$ se n' estraggono in primo luogo gl'interi, e sottiene 1 e $\frac{216}{887}$

Ora, per formarsi un' idea più semplice della frazione $\frac{216}{888}$ si cerca di paragonarla ad una parte dell' unità, affine di non aver da considerare che un sol termine; e par far ciò, si dividono i suoi due termini per 216; si trova 1 per quoziente del numeratore, e $4\frac{23}{216}$ per quello del denominatore: quest' ultimo quoziente, il quale trovasi in conseguenza contenuto tra 4, e 6 ci fa comprendere che la frazione $\frac{216}{887}$ è contenuta tra $\frac{1}{4}$, e $\frac{1}{5}$. Arrestandosi a questo punto, si fa manifesto che il secondo valore approssimativo dell' espressione $\frac{1103}{887}$ è $1\frac{1}{4}$, ovvero $\frac{5}{4}$; ma questo valore è troppo grande, perchè il vero valore sarebbe uguale a 1 più 1 diviso per 4 e $\frac{23}{216}$, il che scrivesi così: $1\frac{1}{4\frac{23}{216}}$.

All' oggetto di formarsi un' idea esatta dell' espressio-

ne $\frac{1}{4\frac{23}{216}}$, bisogna considerarla come indicante il quoziente dell' intero 1 diviso per l' intero 4 accompagnato dalla frazione $\frac{23}{216}$.

Se si dividono i due termini di $\frac{23}{216}$ per 23, il quoziente sarà $\frac{1}{9\frac{9}{23}}$; trascurando i $\frac{9}{23}$ che accompagnano l' intero 9, conseguiremo $\frac{1}{9}$ solamente in luogo di $\frac{23}{221}$, ed in conseguenza 1 $\frac{1}{4\frac{1}{9}}$ sarà un terzo valore approssimativo di $\frac{1103}{878}$ valore, che sarà troppo picciolo, perchè 9 essendo minore del vero quoziente di 216 per 23, la frazione $\frac{1}{9}$ sarà maggiore di quella, che deve accompagnar 4, ed in conseguenza il divisore $4\frac{1}{9}$ sarà maggiore del divisore esatto $4\frac{23}{216}$, ed il quoziente $\frac{1}{4\frac{1}{9}}$ minore del vero.

Riducendo l' intero 4 colla frazione, che l' accompagna, e facendo la divisione, secondo il metodo del n. 80, s' ottiene $\frac{9}{37}$ e si ha 1 e $\frac{9}{37}$, ovvero $\frac{46}{37}$ per il terzo valore approssimativo di $\frac{1103}{887}$.

L' espressione esatta di questo valore essendo

$$1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{9}{23}}},$$

se si dividono i due termini di $\frac{9}{23}$ per 9, avremo

$$1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2\frac{5}{9}}}};$$

trascurando la frazione $\frac{5}{9}$, resterà

$$1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2}}},$$

valore troppo grande, poichè la frazione $\frac{1}{2}$ essendo maggiore di $\frac{1}{2\frac{5}{9}}$, di cui essa tiene il posto, formerà, unendola a 9, un denominator troppo grande; la frazione da unirsi a 4 sarà allor troppo piccola, e l'ultimo denominatore, essendo troppo piccolo, renderà l'ultima frazione troppo grande.

Riducendo in primo luogo $9\frac{1}{2}$ in frazione, conseguiremo $\frac{19}{2}$; $\frac{1}{9\frac{1}{2}}$ equivarrà dunque a $\frac{2}{19}$, ed il valore approssimativo diverrà $1\frac{1}{4\frac{2}{19}}$: ora $\frac{1}{4\frac{2}{19}}$ somministra $\frac{19}{78}$; ed unendovi l'unità si ottiene $1\frac{19}{78}$, ovvero $\frac{97}{78}$ per un quarto valore approssimativo di $\frac{1103}{807}$.

Riprendendo l'espressione

$$1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2\frac{5}{9}}}},$$

divido i due termini dell'ultima frazione $\frac{5}{9}$ per 5; s'ottiene $\frac{1}{1\frac{4}{5}}$ e $1\frac{1}{4\frac{1}{9\frac{1}{2\frac{1}{1\frac{4}{5}}}}}$;

trascurando la frazione $\frac{4}{5}$ resterà

$$1\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{9-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{1}}}};$$

e vedremo, come qui sopra, che questo valore è minor del valore esatto.

La frazione $\frac{1}{2\frac{1}{1}}$ riducesi a $\frac{1}{3}$; quindi la seguente $\frac{1}{9\frac{1}{3}}$ dando $\frac{3}{28}$, quella che segue si cangia in $\frac{1}{4\frac{3}{28}}$ eguale a $\frac{28}{115}$; di manierachè il 5.° valore approssimativo è $1\frac{28}{115}$ ovvero $\frac{143}{115}$.

Dividendo finalmente per 4 i due termini della frazione $\frac{4}{5}$, che si è trascurata qui sopra, ho per quoziente $\frac{1}{1\frac{1}{4}}$; e sopprimendo in primo luogo la frazione $\frac{1}{4}$, ottengono il nuovo valore

$$1\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{9-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{1\frac{1}{1}}}}}.$$

maggiore del vero.

Se si riducono successivamente tutti i denominatori in frazione, a fine d'ottenere la frazione semplice, che dessa rappresenta, si troverà

$$1\frac{47}{193} \text{ ovvero } \frac{240}{193}.$$

Ritenendo la frazione $\frac{1}{4}$ allato dell' ultimo denominatore, formasi l' espressione

$$1\,\frac{1}{4\,\frac{1}{9\,\frac{1}{2\,\frac{1}{1\,\frac{1}{1\,\frac{1}{4}}}}}}$$

la quale, essendo ridotta come le precedenti, riproduce l'espressione frazionaria $\frac{1103}{887}$.

Opererebbesi nella stessa maniera su qualunque altra frazione, e se ne ricaverebbe una seria di valori approssimativi alternativamente maggiori, e minori dei suoi veri valori, se questa è una frazione propriamente detta, ovvero alternativamente minori e maggiori se, come nell' esempio precedente, il numeratore sorpassi il denominatore.

Gli sviluppamenti che ho trovati per l' espressione $\frac{1103}{887}$, sono *frazioni continue*, le quali si possono in generale così definire: *Frazioni, il cui denominatore è composto di un intero più una frazione, la quale ha parimente per denominatore un intero più una frazione; e così successivamente.* Questa specie di frazioni gode di molte proprietà importanti, per le quali io rimando al *Complemento degli Elementi d' Algebra.*

SULL' APPLICAZIONE DELL' ARITMETICA ALLA BANCA, E AL COMMERCIO.

164. A giudicare dal gran numero di regole, e formule che son contenute nei Trattati d' Aritmetica destinati pei Banchieri, e negozianti, si crederebbe che vi fosse per queste professioni un' Aritmetica particolare, laddove che tutta la difficoltà dell' applicazione delle regole ordinarie non riposa che sull' intelligenza dei termini tecnici introdotti dall' uso, e più spesso senza nessun bisogno. Quando questi termini son bene spiegati, qualunque calcolatore che siasi, renderà sempre, in numeri, la vera risposta ai diversi problemi che gli si potranno proporre.

Lo *sconto*, ed il *cambio* sono le operazioni le più usuali della banca, abbiamo veduto (120) come lo sconto dovrebbe effettuarsi, dietro al fine che ci proponghiamo; ma i primi che l' han praticato, hanno trovato più semplice di prelevare il frutto dalla somma intera, come se fosse questa medesima ch' essi pagassero anticipatamente. (Vedasi la nota alla fine del numero 120.).

In generale, nelle contrattazioni, qualunque somma, della quale non si può disporre se non che in un tempo futuro, ha un valore reale minor del suo valor nominale a causa del frutto ch' essa riporta, a contar dal momento, in cui questa si posside ed in conseguenza il godimento d' una somma anticipata aumenta il suo valore reale. Da ciò ne nasce che, per paragonar delle somme pagabili in diverse epoche, bisogna tener conto del frutto, che desse debbono produrre a quello che ne dispone. Le regole del numero 120 son sufficienti per quest' oggetto, ogni qual volta che l' intervallo di tempo non ecceda un anno, e che non si accumulino i frutti col capitale; nel caso contrario, bisogna impiegare le formule concernenti l' *interesse composto*, riportate alla fine dei miei *Elementi d' Algebra*.

Il cambio, che serve ad evitare il trasporto del numerario compensando, gli uni cogli altri i debiti, che si contraggono reciprocamente dai negozianti di diversi paesi, conduce ad un calcolo, il cui fine è sempre di trovar ciò che una somma pagabile in una piazza di commercio vale in un' altra, tanto per rapporto alle due somme riguardate come equivalenti nelle monete di queste piazze; tanto per una serie di rapporti formati da somme equivalenti prese in monete di diverse piazze comunicanti l' une coll' altre. Il numero 133 offre un esempio generale, da cui le formule particolari non differiscono che per le soppressione dei diversi fattori, i quali, in ciascun caso, possono esser comuni al numeratore, e al denominatore de' rapporti paragonati. Le somme equivalenti, che formano questi rapporti, sono annunziate ciascun giorno nei fogli pubblici, perchè desse variano secondo le circostanze: ma questi cangiamenti non influiscono punto sullo spirito del metodo indicato sotto il nome di *regola congiunta*.

A riguardo delle operazioni di commercio, si trova nel numero 142 tutto ciò, ch' è necessario per dividere i guadagni, ovvero le perdite resultati da un' associazione qualunque; i *dritti di commissione*, le *provvisioni*, le *bonificazioni*, ec. si valutano a un tanto per $\frac{0}{0}$, nella stessa maniera che il frutto, le *tasse* le *gabelle*, han dei rapporti coi valori delle mercanzie, ovvero sono stabilite sull' unità tanto di peso, che di volume, e posson concludersi, con delle quantità qualunque, col mezzo delle proporzioni, e delle frazioni.

Finalmente l' *impostamento dei libri di scrittura* non è che la maniera di disporre gli *stati* del *dare*, ed *avere*, ossia dei valori somministrati, e dei valori ricevuti dal negoziante, in un ordine tale, che si possano a ciascun istante paragonare gli uni cogli altri, per conoscere la differenza, e determinare così il *bilancio* tra ciò ch' esso debbe avere, e ciò ch' esso debbe dare.

SUPPLEMENTO

AL *TRATTATO ELEMENTARE D'ARITMETICA*, NECESSARIO PER PASSARE IMMEDIATAMENTE DA QUESTO TRATTATO AGLI *ELEMENTI DI GEOMETRIA*.

I. Per compendiare il discorso, si esprimono con dei segni particolari le parole, le quali ripetonsi più di frequente; e quando ci occupiamo d'un numero, ovvero di una grandezza qualunque senza considerare il suo valore particolare, ma solamente per indicar le sue relazioni con altre grandezze, ovvero le operazioni, alle quali essa debb'essere sottomessa, si distingue questa con una lettera dell'Alfabeto, la quale diviene allora il nome compendiato di essa grandezza.

$+$ *significa* più, ovvero sommato con, . . .

L'espressione A $+$ B indica la somma la quale resulta dalla grandezza rappresentata dalla lettera A sommata con quella rappresentata da B, ovvero A *più* B.

$-$ *significa* meno.

A $-$ B indica ciò, che resta quando si toglie dalla grandezza rappresentata da A quella rappresentata da B, ovvero A *meno* B.

$\times$ *significa* moltiplicato *per* . . .

A $\times$ B indica il prodotto della grandezza rappresentata

da A moltiplicata per quella rappresentata da B, ovvero a *moltiplicata per* B.

$\frac{A}{B}$ indica il quoziente della grandezza rappresentata da A divisa per quella rappresentata da B, ovvero A *divisa per* B.

A = B *significa* che la grandezza rappresentata da A è eguale a quella rappresentata da B, ovvero A *eguale* a B.

A > B *significa* che la grandezza rappresentata da A sorpassa quella rappresentata da B, ovvero A *maggiore di* B.

A < B *significa* A *minore di* B.

2A, 3A, ec. indicano il *doppio*, il *triplo*, ec. della grandezza rappresentata da A.

II. Allorchè si moltiplica un numero per se stesso, si forma la sua *seconda potenza*, ovvero il *suo quadrato*: 5×5, ovvero 25 è la seconda potenza di 5, ossia il quadrato di 5.

La seconda potenza è dunque il prodotto di due fattori eguali; ciascun di questi fattori è la radice quadrata del prodotto: 5 è la radice quadrata di 25.

Se si moltiplichi la seconda potenza per la sua radice, si ha la *terza potenza*, ovvero il *cubo*: 5×25, ovvero 125 è la terza potenza di 5.

La terza potenza è un prodotto formato dalla moltiplicazione di tre fattori eguali; ciascun di questi fattori è la *radice cubica* di questo prodotto: 125 è il, prodotto di 5 moltiplicato due volte per sè stesso, ovvero 5×5×5; e 5 è la radice cubica di 125.

In generale A^2 essendo il compendio di A×A indica la seconda potenza, ovvero il quadrato di A.

$\sqrt{A}$ indica la radice quadrata di A, ovvero il numero,

il quale moltiplicato per sè stesso produrrebbe il numero rappresentato da A.

A essendo il compendio di $A \times A \times A$, indica la terza potenza, ovvero il cubo di A.

$\sqrt[3]{A}$ indica la radice cubica di A, ovvero il numero, il quale moltiplicato due volte per sè stesso produrrebbe il numero A.

Tutti i numeri non son de' quadrati, o de' cubi perfetti, vale a dire, non hanno radici quadrate, o cubiche, che si possano esprimere esattamente: 19, per esempio, trovandosi tra 16, ch'è il quadrato di 4, e 25, ch'è il quadrato di 5, ha per radice un numero compreso tra 4, e 5, ma che non si potrebbe assegnare esattamente, neppure col soccorso delle frazioni: questo è un numero *incommensurabile*.

Parimente 89 trovandosi tra 64, ch'è il cubo di 4, e 125, ch'è quello di 5, ha per radice cubica un numero compreso tra 4, e 5, ma che neppur questo potrebbesi assegnare esattamente. Daremo in appresso de' metodi per approssimarsi tanto davvicino quanto vorremo alle radici quadrate, ed alle radici cubiche de' numeri, i quali non son de' quadrati, o de' cubi perfetti.

III. Allorchè due proporzioni hanno un rapporto comune, è manifesto che si posson mettere in proporzione gli altri due rapporti, perchè dessi sono eguali a quello che loro è comune.

Se si ha

$$A : B :: C : D,$$
$$E : F :: C : D,$$

ne resulterà necessariamente

$$A : B :: E : F.$$

Allorchè due proporzioni hanno i medesimi antecedenti, si posson mettere i conseguenti in proporzione; perchè se si ha

$$A : B :: C : D$$
$$A : E :: C : F$$

cangiando i medj di posto, queste proporzioni diverranno

$$A : C :: B : D$$
$$A : C :: E : F$$

e ne conchiuderemo

$$B : D :: E : F$$

ciò che riducesi a $B : E :: D : F$.

IV. si posson fare ancora nelle proprozioni altri cangiamenti, i quali nello stesso modo che le traposizioni de' termini, non turbino l' eguaglianza del prodotto degli estremi a quello de' medj.

1.° Se al conseguente d' un rapporto si aggiunga il suo, antecedente, e si paragoni questa somma coll' antecedente, quest' ultimo vi sarà contenuto una volta di più di quel che non lo era nel primo conseguente; il nuovo rapporto sarà dunque eguale al rapporto primitivo aumentato dell' unità. Se si faccia la medesima operazione sopra i due rapporti d' una proporzione, ne resulteranno evidentemente, due nuovi rapporti eguali tra loro, ed in conseguenza una nuova proporzione

Sia, per esempio, la proporzione

$$4 : 6 :: 12 : 18,$$

avremo

$$6+4 : 4 :: 18+12 : 12$$

ovvero

$$10 : 4 :: 30 : 12.$$

2.° Se dal conseguente d'un rapporto si tolga l'antecedente, e si paragoni questa differenza coll'antecedente, quest'ultimo vi sarà centenuto una volta di meno che nel primo conseguente: il nuovo rapporto sarà dunque eguale al rapporto primitivo diminuito dell'unità. Se si faccia la medesima operazione sui due rapporti d'una proporzione, ne resulteranno due nuovi rapporti eguali tra loro, ed in conseguenza una nuova proporzione.

Dalla proporzione

$$4 : 6 :: 12 : 18$$

ne dedurremo

$$6-4 : 4 :: 18-12 : 12$$

ovvero

$$2 : 4 :: 6 : 12$$

Per una proporzione tra grandezze qualunque denotate dalle lettere

$$A : B :: C : D$$

avremo, mediante i cangiamenti suddivisati,

$$B+A : A :: D+C : C,$$
$$B-A : A :: D-C : C.$$

Se si cangiano i medj di posto in questi ultimi, otterremo

$$B+A : D+C :: A : C$$
$$B-A : D-C :: A : C;$$

ma in virtù del medesimo cangiamento la proporzione

$$A : B :: C : D$$

somministra pure

$$A : C :: B : D$$

e poichè i rapporti A : C, B : D : son eguali, ne concluderemo

$$B+A : D+C :: A : C, \text{ ovvero } : B :: D$$
$$B-A : D-C :: A : C, \text{ ovvero } : B :: D$$

resultato il quale si enuncia nel modo seguente.

In una proporzione qualunque la somma, o la differenza de' due primi termini sta alla somma, o alla differenza de' due ultimi, come il primo sta al terzo, o come il secondo sta al quarto.

Di più, i due rapporti A : C, ovvero B : D essendo comuni alle due ultime proporzioni qui sopra, ne resulta che gli altri rapporti delle proporzioni medesime sono eguali, e che in conseguenza

$$B+A : D+C :: B-A : D-C$$

ovvero, cangiando i medj di posto,

$$B+A : B-A :: D+C : D-C$$

vale a dire che *la somma de' due primi termini d' una proporzione sta alla lor differenza, come la somma dei due ultimi sta alla lor differenza.*

Per esempio,

$$6+4 : 6-4 :: 18+12 : 18-12$$

ovvero

$$10 : 2 :: 30 : 6.$$

Allorchè la proporzione

$$A : B :: C : D$$

si cangia in

$$A : C :: B : D$$

A, e B sono gli antecedenti, C, e D i conseguenti, e le proporzioni

$$B+A : D+C :: A : C, \text{ ovvero } :: B : D$$
$$B-A : D+C :: A : C, \text{ ovvero } :: B : D$$

corrispondono all'enunciato seguente.

La somma; o la differenza negli antecedenti d'una proporzione sta alla somma, o alla differenza dei conseguenti come un antecedente sta al suo conseguente.

Se ne deduce *la somma degli antecedenti sta alla lor differenza come la somma de' conseguenti sta alla lor differenza.*

Se si abbia una serie di rapporti eguali

$$A : B :: C : D :: E : F,$$

non considerando in primo luogo che i due primi, i quali forman la proporzione

$$A : B :: C : D,$$

se ne deduce da ciò che precede

$$A+C : B+D :: A : B;$$

e poichè il terzo rapporto E : F è eguale al primo A : B, avremo

$$A+C : B+D :: E : F.$$

Se si prenda la somma degli antecedenti, e quella de' conseguenti in quest'ultima proporzione, ne resulterà

$$A+C+E : B+D+F :: E : F, \text{ ovvero } :: A : B$$

Seguendo l'andamento medesimo, qualunque fosse il numero de' rapporti eguali, avrebbesi in ultimo luogo *la somma d'un numero qualunque d'antecedenti sta alla somma de' lor conseguenti come un antecedente sta al suo conseguente.*

V. Allorchè si hanno due proporzioni qualunque

$$A : B :: C : D$$
$$E : F :: G : H$$

e si moltiplichino *per ordine*, vale a dire, termine a termine, i prodotti formano una proporzione, ovvero si ha

$$A \times E : B \times F :: C \times G : D \times H$$

Ciò è manifesto, poichè i nuovi rapporti $\frac{B \times F}{A \times E}$, $\frac{D \times H}{C \times G}$ saranno respettivamente i prodotti de' rapporti primitivi

$$\frac{B}{A} \text{ e } \frac{F}{E}, \frac{D}{C} \text{ e } \frac{H}{G},$$

i quali sono eguali.

Se si moltiplichi la proporzione

$$A : B :: C : D$$

per

$$A : B :: C : D :$$

avremo (II)

$$A^2 : B^2 :: C^2 : D^2 ;$$

dal che ne segue che *i quadrati di quattro quantità in proporzione formano una nuova proporzione.*

Moltiplicando la proporzione

$$A^2 : B^2 :: C^2 : D^2$$

per

$$A : B :: C : D,$$

avremo

$$A^3 : B^3 :: C^3 : D^3$$

vale a dire, che i *cubi di quattro quantità in proporzione formano una nuova proporzione.*

VI. Si considerano spesso delle grandezze decomposte in più parti, e si ha bisogno di addizionarle, di sottrarle, o di moltiplicarle in questo stato, vale a dire di determinare come i resultati di queste operazioni siano formati colle parti delle grandezze proposte. Ecco alcune regole su questo soggetto.

1.° È manifesto che se si voglia addizionare la grandezza B—C con la grandezza A, fa di mestieri scrivere A+B—C; poichè non è nè B, nè C, che ci proponghiamo di unire con A, ma solamente l'eccesso di B su C:

D'altronde se si prendano le rette MP, PN, e QN per rappresentare le grandezze A, B, C, vedremo che

$$PQ=PN-QN,$$
$$MP+PQ=MP+PN-QN.$$

2.° Se dalla grandezza A si volesse togliere la grandezza B—C, bisognerebbe scrivere A+C—B, ovvero, ch'è la stessa cosa, A—B+C.

Infatti, la differenza di due grandezze non cangia allorchè si aggiunge a ciascuna la stessa quantità: ora, se aggiungasi C a B—C, conseguiremo B; facendo la medesima addizione alla grandezza A, si ottiene A+C, e la sottrazione di B dà allora A+C—B.

La figura di sopra conferma questo medesimo resultato; poichè se si prendano le rette MN, PN, PQ per le grandezze A, B, C, si ha

$$QN=PN-PQ,$$
$$MN-QN=MQ=MP+PQ;$$

e poichè MP=MN—PN, conseguiremo

$$MP+PQ=MN-PN+PQ;$$

resultato, che corrisponde ad $A-B+C$.

3.° Il prodotto della grandezza A per la grandezza $B+C$ è espresso da $A\times B+A\times C$; poichè detto prodotto deve contener tante volte il numero A quante unità vi sono nella somma de' numeri B, e C, e deve in conseguenza esser composto di A preso tante volte quante unità vi sono in B, più di A preso tante volte quante unità vi sono in C: il che si scrive $A\times B+A\times C$.

4.° Il prodotto di A per $B-C$ è espresso da $A\times B-A\times C$; poichè, se si rappresenti $B-C$ per D, avremo evidentemente $B=D+C$, ed in conseguenze $A\times B=A\times D+A\times C$: concluderemo da ciò che $A\times D=A\times B-A\times C$; il che forma la proposizione enunciata qui sopra, perchè $D=B-C$.

VII. Segue da ciò che precede, che *il quadrato d' un numero composto di due parti contiene il quadrato della prima, due volte il prodotto della prima per la seconda, ed il quadrato della seconda.* Il numero 13, per esempio, essendo considerato come eguale a $9+4$, il suo quadrato 169 è composto

del quadrato di 9, ovvero	81
di 2 volte 9×4, ovvero	72
del quadrato di 4, ovvero	16
TOTALE	169

Per dimostrar l' enunciato in generale, serve osservare che il prodotto di A per $B+C$ essendo $A\times B+A\times C$, se si faccia $A=B+C$, i prodotti parziali $A\times B$, ed $A\times C$ diverranno $B\times B+B\times C$, e $B\times C+C\times C$; e riunendoli, otterremo il risultato

$$B\times B+B\times C+B\times C+C\times C,$$

il quale può scriversi come segue

$$B^2+2B\times C+C^2;$$

il che dà il quadrato di $B+C$ conforme all'enunciato di sopra.

Si trova in una maniera simile, che *il quadrato della differenza di due grandezze è composto del quadrato della prima, meno due volte il prodotto della prima per la seconda, più il quadrato della seconda.* Il numero 9 essendo eguale a $13-4$, per esempio, il suo quadrato 81 sarà formato di $169-2$ volte $4\times13+16$; ch'è facile di verificare.

La dimostrazione generale della proposizione suddivisata si forma facendo $A=B-C$ nel prodotto di A per la differenza $B-C$; poichè questo prodotto essendo espresso da $A\times B-A\times C$, se si scrive primieramente $B-C$ in luogo di A nei prodotti $A\times B$, ed $A\times C$, essi diventeranno respettivamente

$$B\times B-B\times C, \text{ e } B\times C-C\times C;$$

e per togliere il secondo dal primo, bisognerà, dietro all'articolo VI, scrivere

$$B\times B-B\times C-B\times C+C\times C;$$

ciò che riducesi a

$$B^2-2B\times C+C^2,$$

e somministra il quadrato di $B-C$ conformemente all'enunciato di sopra.

VIII. Il ravvicinamento dell'espressioni, o *formule*, dietro alle quali si calcolano le aree

Del Parallelogrammo,

Del Triangolo,

Del Trapezio,

Del Circolo,

Finalmente del settor circolare,

mostra che la determinazione di tutte queste aerce non dipende che da un prodotto di due fattori, i quali si posson sempre riguardare come la base, e l'altezza, vale a dire, come le *due dimensioni* di un rettangolo, equivalente all'area cercata. Quando questi fattori sono espressi in misure decimali, la lor moltiplicazione si effettua secondo il solito; ma la denominazione delle unità del resultato richiede alcune attenzioni.

Sia, per esempio, un rettangolo di 49mi, 54 di base sopra 15mi, 27 d'altezza; moltiplicando questi due numeri, si trova 756,4758. L'unità di questo numero è il quadrato che ha un metro di lato, e che per questa ragione chiamasi *metro quadrato*; le frazioni decimali ne son sempre la decima, la centesima, la millesima, ec. parte: la misura suddivisata potrebbe enunciarsi così 756 metri quadrati, e 4758 decimillesimi di metro quadrato; ma il più spesso si fan corrispondere le suddivisioni del metro quadrato a quello del metro lineare; ed allora si deve osservare che

Il metro quadrato contiene cento quadrati di un decimetro di lato, ovvero cento *decimetri quadrati*:

Il decimetro quadrato contiene cento quadrati d'un centimetro di lato, ovvero cento *centimetri quadrati*; e così di seguito.

Sono dunque i centesimi di metro quadrato, i quali esprimono i decimetri quadrati; i decimillesimi, i quali esprimono i centimetri quadrati; i milionesimi, i quali esprimono i millimetri quadrati. Dietro a ciò, il numero 756, 4758 s'enuncia

756 metri quadrati, 37 decimetri quadrati, 58 centimetri quadrati.

Si deduce da ciò che non è permesso confondere il decimo di metro quadrato col decimetro quadrato. La prima di queste suddivisioni non potrebbe rappresentarsi da un quadrato, le cui dimensioni sian de' numeri esatti; poi-

chè l' unità non ne contiene che 10, e dieci non è un'quadrato perfetto.

Si può riportare comodamente il decimo di metro quadro ad un rettangolo di un metro di base sopra un dei cimetro d'altezza: è lo stesso a riguardo delle frazioni decimali che seguono, e che denotano isolatamente de'rettangoli d' un metro di base sopra un centimetro, millimetro, ec. d' altezza.

Non è che separando le cifre di due in due, a partir dalla virgola, che si può enunciare il numero in misure quadrate.

Quando le cifre decimali sono in numero impari, fa di mestieri scrivere uno zero alla destra affinchè l' ultimo ordine di decimali sia riportato a misure quadrate.

Il rettangolo, che ha 27mi di base sopra 4mi, 3 d'altezza, per esempio, ha per misura in metri quadatri 116,1. Ponendo un zero alla destra di questo numero, desso diviene 116,10; e si enuncia 116 metri quadrati, e 10 decimetri quadrati.

Ciò che ho detto si applica egualmente ai diversi ordini di unità posti alla sinistra della virgola; ed osservando che l'*ara*, essendo un quadrato di 10 metri di lato, contiene 100 metri quadrati, che l'*ecatara* contien cento are, il numero 37549 metri quadrati, per esempio, si decompone in 3 ecatare, 75 are, e 49 metri quadrati, o centiare.

È a proposito di stabilire il senso di più espressioni, le quali qualche volta confondonsi. Che si dica un metro quadro, ovvero un metro in quadrato, ciò riducesi allo stesso, poichè non vi può esser questione nei due casi che d' un quadrato il cui lato è un metro; ma bisogna accuratamente distinguere, per esempio, gli spazj di 10 *metri quadrati*, o di 10 *metri in quadrato*: perchè l' uno indica un' area equivalente a 10 quadrati d' un metro di lato, e l' altro un sol quadrato avente 10 metri di lato, e che comprende in conseguenza 100 metri quadrati.

L'uso delle misure decimali semplifica considerabilmente i calcoli della misura pratica dell'estensione. Con le antiche misure il primo mezzo che si presenta è quello di convertire ciascun dei fattori nelle suddivisioni della più piccola specie, la quale sia contenuta in uno di essi, affinchè il risultato sia espresso in misure quadrate aventi questa suddivisione per lato. Se vi sian, per esempio, delle linee in un dei fattori, bisogna ridurli amendue in linee; il prodotto sarà composto di linee quadrate. Per risalire a delle misure maggiori, osserveremo che

il pollice quadrato equiv. a 12×12, ovv. 144 linee quadrate;

il piede quadrato 12×12, ovv. 144 poll. quadrati;

la tese quadrata 6×6, ovv. 36 piedi quadrati;

e dividendo successivamente per questi numeri, tradurremo il risultato in tese quadrate, piedi, e pollici quadrati.

Peraltro questo mezzo era poco in uso, perchè conduce ad operare su dei numeri troppo grandi; ma si adoprava quello che serve ad effettuar la moltiplicazione de' numeri complessi. Che siano, per esempio, le due dimensioni da moltiplicarsi

$$49^{tese}\ 5^{pi}\ 7^{po},\ e\ 32^{t}\ 4^{pi}\ 5^{po}:$$

se si scelga il primo per moltiplicando, concepiremo primieramente un rettangolo avente 49^{tese} 5^{pi} 7^{po} di base sopra una tesa d'altezza, e che starà in conseguenza a quello, del quale cercasi la misura, come 1^{t} : 32^{t} 4^{pi} 5^{po} Sarà permesso in conseguenza di riguardare il moltiplicatore 32^{t} 4^{pi} 5^{po} come un numero astratto: ora, un rettangolo di 49^{t} 5^{pi} 7^{po} di base sopra una tesa d'altezza si decompone nei seguenti:

1.° Un rettangolo di 49^{tese} di base sopra 1^{t} d'altezza, e contenente 49^{tese} quadrate;

2.° 5 rettangoli aventi ciascuno un piede di base sopra una tesa d'altezza: questi rettangoli si chiamano *tese-pie-*

di; egli è manifesto che ve ne bisognano 6 per formare la tesa quadrata;

3.° 7 rettangoli d'un pollice di base sopra una tesa d'altezza; questi rettangoli si chiamano *tese-pollici*, ne bisognano evidentemente 12 per formare la tesa-piede.

Proseguendo in tal maniera arriverebbesi, se vi fosse luogo, alle *tese-linee*, e alle *tese-punti*, le quali avrebbero tra loro, e colla tesa quadrata i medesimi rapporti delle suddivisioni lineari, che a loro servon di base. I compendj per indicare queste misure, cominciando dalla tesa quadrata, sono

t. t., *t. pi*, *t. po*, *t. l.*, *t. pt.*

Ciò premesso, l'impiego delle parti aliquote, conformemente alle regole esposte alla fine del *Trattato Elementare d'Aritmetica*, somministra l'operazione seguente.

	$49^{t.t}$	5^{pi}	$7^{t.po}$		
	$32^{t.}$	4^{p}	5^{p}		
	98				
	147				
Per $3^{t.pi}$	16				
$1^{t.pi}$	5	2			
$1^{t.pi}$	5	2			
Per $6^{t.po}$	2	4			
$1^{t.po}$		2	8		
Per 3^{pi}	24	5	9	$6^{t.l}$	
1^{pi}	8	1	11	2	
Per 4^{po}	2	4	7	8	$8^{t.pt}$
1^{po}		4	1	11	2
Prodotto totale....	$1634^{t.t}$	$3^{t.pi}$	$2^{t.po}$	$3^{t.l}$	$1^{t.pt}$

Eccetto la prima parte di questo resultamento, la quale è in tese quadrate, le altre son dei rettangoli; ma la loro conversione in piedi quadrati, pollici quadrati, ec. è facile; poichè

la tesa-piede equiv. a 6pi $\times$ 1pi, ovvero a 6 piedi quadrati
la tesa-pollice $\frac{1t.pi}{12}$, ovv., $\frac{1pi}{2}$ quad., ovv. $72^{pol.}$ quad.,
la tesa-linea $\frac{1t.po}{12}$, ovv. 6 pollici quadrati;

la tesa-punto $\frac{11.1}{12}$, ovv. $\frac{1}{2}$ pol. quadr., ovv. 72lin. quad.

Moltiplicando dunque rispettivamente per 6, $\frac{1}{2}$, 6, $\frac{1}{2}$, le tese-piedi, tese-pollici, tese-linee, e tese-punti del prodotto qui sopra ottenuto, si trovano 1634 tese quadrate, 19 piedi quadrati, e 23 pollici quadrati.

La tesa quadrata, e le sue parti non servivano che alla misura delle piccole aeree; i campi si valutavano in *pertiche*, ed in *arpenti*: quest' ultime misure han variato secondo i tempi, e secondo i luoghi. Si trovano nelle tavole dell' Aritmetica due sorti d' arpenti paragonati con le nuove misure agrarie, cioè l' *arpento dell' Acque, e Foreste*, e l' *arpento di Parigi*. L' uno, e l' altro eran composti di 100 pertiche; la pertica quadrata, era un quadrato, il quale rispetto agli arpenti dell' Acqua, e Foreste aveva 22 piedi di lato, e solamente 18 in quello di Parigi. Il rapporto delle pertiche, lo stesso che quello de' due arpenti, è quello de' quadrati de' numeri 22, e 18, vale a dire di 484 a 324, il quale presso a poco riducesi al rapporto di 3 a 2.

La pertica di Parigi avendo 18 piedi, ovvero tre tese di lato, conteneva 9 tese quadrate; e l' arpento del medesimo luogo contenendo esattamente 900 tese quadrate, era più comodo dell' altro; ma tutte queste misure sono di gran lunga inferiori alle misure decimali, nelle quali esse facilmente trasformansi col mezzo delle tavole precitate: e d' altronde convertendo in metri, e parti decimali di metro le dimensioni della misura proposta, il loro prodotto somministrerebbe il rapporto di questa misura col metro quadrato.

Non si tien proposito negli Elementi di Geometri che delle figure terminate da linee rette, o da circonferenze di circolo; ma le formule citate nel principio di quest' articolo servono pure nella maggior parte de' casi della pratica alla quadratura dell' aree circonscritte da linee curve, perchè dividendo queste linee curve in piccole por-

zioni sensibilmente rette, si riduce la figura proposta ad un poligono rettilineo.

IX. L'espressioni de' volumi del Prisma,

della Piramide

del Prisma triangolare troncato

del Cono

del Cilindro

e della Sfera

essendo tutte composte come rilevasi del prodotto d'un' area moltiplicata per un' altezza, dipendono necessariamente da un prodotto di tre fattori, poichè l'area ne contien due; e questo prodotto riducesi, all'espressione d'un parallelepipedo rettangolo equivalente al corpo proposto. È in questo senso che dicesi un volume qualunque è il prodotto di 3 *dimensioni*. La loro moltiplicazione si fa coi soliti metodi ordinarj quando i tre fattori sono espressi in misure decimali; ed il resultato è composto d'un numero intero, e di parti decimali del cubo che ha per lato l'unità lineare.

Prendo, per esempio, un parallelepipedo rettangolo, le cui dimensioni sono 49mi, 54, 15mi, 27, e 8mi, 5; il prodotto 6430, 0443 di questi numeri fa vedere che il parallellepipedo proposto contiene 6430 cubici d'un metro di lato, e 443 diecimillesimi di questo cubo.

I decimali qui sopra enunciati non son riportati che all'unità principale, la quale è il cubo d'un metro di lato, e che si chiama ancora *metro cubico*: se si vuol decomporlo in parti, le quali siano i cubi di parti decimali dell'unità lineare, bisogna osservare che

Il metro cubico contiene 10×10×10,ovv. 1000 *decim. cubici*;

Il decimetro cubico . . 10×10×10,ovv. 1000 *centim. cubici*;

e così di seguito; e che in conseguenza i decimetri cubici, ed i centimetri cubici esprimono dei millesimi, e dei milionesimi di metro cubico; ed in generale i decimali presi di tre in tre sono quelli che corrispondono a delle misure cubiche.

Il resultato 6430,0443 non contenendo un numero di cifre decimali, che sia multiplo di 3, bisogna supplirvi con degli zeri, e scriverlo così

6430 , 044300.

In questa maniera si enuncia dicendo

6430 metri cubici, 44 decimetri cubici, e 300 centim. cubici.

È inutile entrare in maggiori particolarità sopra questo soggetto, poichè sarà molto più comodo di tenersi alla prima enunciazione, purchè si abbia cura di non confondere il decimo, il centesimo, ec. del metro cubico col decimetro, col centimetro, ec. cubici. I primi si rapportano a de' parallelepipedi rettangoli aventi tutti per base il metro quadrato, e per altezza un decimetro, un centimetro, ec.

Quando colle antiche misure non si voleva operare che sopra numeri interi, si convertiva ciascun dei fattori del volume cercato nelle suddivisioni della più piccola specie, che si fosse trovata nei tre; il prodotto trovavasi espresso in cubi aventi queste suddivisioni per lato; in linee cubiche, per esempio, se i fattori erano stati convertiti in linee. Arrivavasi in seguito a delle misure maggiori osservando, che

il pollice cubico equivale a 12×12×12

ovvero . . . . . 1728 linee cubici,

il piede cubico . . . . . 1728 pollici cubici,

la tesa cubica 6×6×6, ovvero. . 216 piedi cubici,

e dividendo tanto quanto era possibile per questi numeri.

Il più spesso lasciavansi i fattori sotto la forma di numeri complessi. Moltiplicando due fattori tra loro calcolavasi primieramente in tese, quadrate, tese-piedi, tese-pollici, ec. l'area, che servir doveva di base al volume cercato (considerata come quello d'un parallelepipedo rettangolo); poi si riguardava quest'area come la base di un parallelepipedo rettangolo avente una tesa d'altezza, e che stava in conseguenza al corpo cerato come l'unità stava al terzo fattore, che poteva allora essere riguardato come un numero astratto. È manifesto che

1.° Una tesa quadrata di base sopra una tesa d'altezza forma un cubo di una tesa di lato ovvero una *tesa-cubica*.

2.° Una tesa-piede, vale a dire un rettangolo d'una tesa di lunghezza sopra un piede di larghezza, essendo presa per base di un parallelepipedo rettangolo di una tesa d'altezza, questo parallelepipedo ha due costole contigue d'una tesa, e può essere considerato come avente una tesa quadrata di base sopra un piede d'altezza: gli si dà per questa ragione il nome di *tesa-piede*, il che si scrive *t. t. pi*: ne son necessarie 6 per formare la tesa cubica;

3.° Una tesa-pollice sopra una tesa di altezza forma parimente un parallelepipedo d'una tesa quadrata di base sopra un pollice di altezza, che si chiama *tesa-tesa-pollice*, e che s'indica per *t. t. po.*: ne son necessarie 12 per formare la tesa-tesa-piede;

4.° La medesima progressione somministra in seguito delle *tese-tese-linee*, ovvero, *t. t. l.*, *tese-tese-punti*, ovvero *t. t. pt.*

Il volume del parallelepipedo di una tesa di altezza si trova così espresso da un numero, il quale rapportasi a delle suddivisioni assai semplice, e non si tratta d'altro che di moltiplicare, col mezzo delle parti aliquote, questo numero per l'altezza del parallelepipedo proposto.

Ecco per esempio, il parallelepipedo rettangolo, le cui dimensioni sono

$$49^{t.}\ 5^{pi}\ 7^{po}\ ,\ 32^{t}\ 4^{pi}\ 5^{po}\ ,\ e\ 5^{t}\ 2^{pi}\ 10^{po}.$$

Le due prime di già impiegate nell' artico VIII. (pag. 165) danno per prodotto

$$1634^{t.t}\ 3^{t.pi}\ 2^{t.po}\ 3^{tl.}\ 10^{t.pt}.$$

Un parallelepipedo costrutto su questa base, e sopra una tesa d' altezza conterrebbe

$$1634^{t.t.t}\ 3^{t.t.pi}\ 2^{t.tpo}\ 3^{t.tl}\ 10^{t.t.pt};$$

moltiplicando questo numero per 5^{t} 2pi, 10po, altezza del parallelepipedo proposto, avremo il volume di quest'ultimo.

	$1634^{t.t.t}$	$3^{t.tpi}$	$2^{t.tpo}$	$3^{t.tl}$	$10^{t.t.pt}$
	5^{t}	2^{pi}	10^{po}		
	8710				
Per $2^{t.t.pi}$	1	4			
$1^{t.t.pi}$		5			
Per $2^{t.t.po}$			10		
Per $3^{t.t.l}$			1	3	
Per $6^{t.t.pt}$				2	6
$2^{t.t.pt}$					10
$2^{t.t.pt}$					10
Per 2^{pi}	544	5	0	9	$3\frac{4}{12}$.
Per 6^{po}	136	1	3	2	$3\frac{10}{12}$.
2^{po}	45	2	5	0	$9\frac{3}{12}$.
2^{po}	45	2	5	0	$9\frac{3}{12}$.

Prodotto totale $8944^{t.t.t.}$ $3^{t..pi}$ $1^{t.t.po}$ $8^{t.t.l.}$ $3^{t.t.pt}\frac{8}{12}$.

In luogo di $\frac{8}{12}$ si può aggiungere un' unità alle tese-tese-punti.

Nella pratica si ha raramente bisogno di spingere i calcoli sino alle ultime suddivisioni com' io l' ho fatto quì sopra, perchè il loro valore è quasi nullo: e quando non si tratta che di determinare il prezzo d' un dato lavoro,

la forma di queste suddivisioni è la più comoda: frattanto esse qualche volta riduconsi a misure cubiche, e per questo serve osservare, che la tesa cubica contenendo 216 piedi cubici,

la tesa-tesa-piede ne cont. $\frac{216}{6}$, ovvero 36;

la tesa-tesa-pollice. . . . . $\frac{36}{12}$, ovvero 3;

la tesa-tesa-linea. . . . . $\frac{3}{12}$, ovvero $\frac{1}{4}$, ovvero 432^{po} cubici (poichè il piede cubico contiene 1728 pollici cubici);

la tesa-tesa-punto . . . . . $\frac{432}{12}$, ovvero 36^{po} cubici.

In conseguenza, si moltiplicano respettivamente pei numeri 36, 3, $\frac{1}{4}$, 36 i diversi numeri delle suddivisioni indicate di sopra, coll' attenzione di moltiplicare per 432 il resto delle tese-tese-linee, se la divisione per 4 ne lasciasse uno, di contare il prodotto per de' pollici cubi, ed unirlo a ciò, che daranno le tese-tese-punti. Il numero

$$8944^{t.t.t.}\ 3^{t.t.pi.}\ 1^{t.t.po.}\ 8^{t.t.l.}\ 4^{t.t.pl.}$$

trovato di sopra diviene

8944 tese cubiche, 113 piedi cubici, 144 pollici cubici.

L' uso de' Mercanti di legname era di misurare questo genere non con la tesa cubica, ma colla *soliva*, che dessa avevano stabilita di 6 pollici *in quadro* su 12 piedi di lunghezza, vale a dire, formante un parallelepipedo rettangolo, la cui base fosse un quadrato di 6 pollici di lato, e l' altezza 12 piedi; questa base avendo $\frac{1}{2}$ piedi di lato contiene $\frac{1}{4}$ di piede quadrato, e moltiplicando per l'altezza 12, si trovano tre piedi cubici per il volume della soliva. Questo volume, preso per unità, era diviso in sei

parti chiamate *piedi di soliva*, ciascuno de' quali equivaleva in conseguenza ad $\frac{1}{2}$ piede cubico, ovvero a 864 pollici cubici. Il piede di soliva si divideva pure in 12 parti chiamate *pollici di soliva*, e continenti in conseguenza ciascuno 72 pollici cubici.

Si vede che le divisioni della soliva seguivano la medesima legge che quella della tesa cubica in tese-tese-piede ec.; e la soliva intera essendo di 3 piedi cubici, si trova essere la 72ma parte della tesa cubica. Si può dunque, moltiplicandola per 72, convertire un numero di tese-cubiche, tese tese-piedi, ec., in solive, e parti di soliva; con questo mezzo la *tesa di legname* rientrerebbe nelle regole della tesa generale di tre dimensioni. Non è punto più difficile di formarsi delle regole particolari per ottenere immediatamente il resultato della misura cubica d'un solido in solive.

Ma quanto l'uniformità delle nuove misure, le quali riducono tutto al metro cubico, ovvero allo *stero*, e la loro suddivision decimale, la quale rende tutte le operazioni simili a quelle che si offettuano sui numeri interi, son preferibili a questi diversi metodi, comunque ingegnosi essi possan sembrare! Ponendole quì sotto gli occhi del lettore, in paragone coi calcoli decimali, ho avuto principalmente per fine di render più mirabile l'immenso vantaggio di questi ultimi: vantaggio, del quale bisogna sperare che sarà convinta la generazione futura, se la sua educazione sarà ben diretta su questo punto; poichè fino a tanto che gli artefici non si disfaranno del piede, e della tesa, ch'essi portano seco loro, e che i medesimi se ne serviranno per prendere le loro misure, e che dopo aver fatto il calcolo secondo queste misure, essi dovranno ancora, per conformarsi alla legge, convertire alle antiche misure nelle nuove, egli è impossibile che dessi vedano nel sistema metrico decimale altra cosa che un'innovazione importuna. Finalmente sarebbe necessario che tutti quelli, i quali hanno dei numeri da prescrivere, tanto come amministratori, che come ingegnieri, scegliessero tanto quanto è possibile de' numeri tondi in nuove misure, come facevasi nelle antiche.

Le conversioni da un sistema in un altro addiventando rare di più in più, si effettuirebbero senza pena mercè delle tavole calcolate già da gran tempo per quest' oggetto; e quando non si avessero queste tavole sotto mano, vi si supplirebbe calcolando mediante le dimensioni ridotte in nuove misure il valor del volume che si vuol esprimere con queste misure. In tal maniera formando il cubo del numero decimale, ch' esprime la tesa pel metro, si avrebbe il rapporto della tesa cubica a metro cubico.

Il legname da ardere misurasi disponendolo in una intelajature, e la massa prende la forma d'un parallelepipedo rettangolo, il quale ha per base l' area di questa intelajatura, e per altezza la lunghezza dei pezzi. L' intelajatura, che determinava l' antica corda, aveva 8 piedi di lunghezza sopra 4 piedi di altezza, ed in conseguenza 32 piedi quadrati di superficie. La lunghezza dei pezzi essendo di 4 piedi, la corda di legna conteneva 128 piedi cubici; e col mezzo di questo numero se ne calcolerebbe senza pena il rapporto col metro cubico, ossia stero.

Quando le misure non son de' parallelepipedi, ma dei cilindri, come lo erano i litroni, le staja, e come lo sono i litri, i loro volumi si calcolano col mezzo dell' espressioni proprie a questa forma di corpi.

X. Parlerò adesso del metodo che bisogna impiegare per *estrarre* le radici seconde, o quadrate dei numeri. Suppone questo metodo, che si conoscano le seconde potenze o i quadrati di quei numeri che sono espressi per mezzo d' una sola cifra: ecco dunque i nove primi numeri colle loro seconde potenze, o quadrati scritti al di sotto di ciascheduno

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81.

Si fa manifesto da questa tavola, che la seconda potenza d' un numero espresso da una sola cifra non ne contiene più di due: 10. ch' è il più piccolo numero espresso da due cifre, ne ha tre nel suo quadrato 100. A fine di pre-

pararsi a decomporre la seconda potenza d'un numero espresso da due cifre, fa di mestieri osservare, che dalla proposizione dimostrata all'articolo VII si deduce facilmente che, *se un numero qualunque si consideri come composto di diecine e di unità, il quadrato di questo numero deve contenere il quadrato delle diecine, due volte il prodotto delle diecine per le unità, ed il quadrato delle unità.*

Prendasi, per esempio, il numero 47, e si decomponga in $40+7$, oppure in 4 diecine, e 7 unità: se si rappresentino per B le 4 diecine ovvero 40 unità e per C le 7 unità; avremo, in virtù della proposizione qui sopra enunciata, $(B+C)^2=B^2+2B\times C+C^2$; sostituendo in luogo di B e C i loro valori otterremo

$$(40+7)^2=47\times 47=40\times 40+80\times 7+7\times 7$$
$$=1600+560+49=2209$$

Per ritornare adesso dal numero 2209 alla sua radice 47, osserveremo primieramente, che il quadrato delle diecine 1600 non ha cifre significative di un ordine inferiore alle centinaja ch'egli è il maggior quadrato che possano contenere le 22 centinaja di 2209, poichè 22 cade tra 16, e 25, vale a dire tra il quadrato di 4, e quello di 5, come il 47 cade tra 4 diecine, ovvero 40, e 5 diecine, ovvero 50.

Se dunque cerchiamo il maggior quadrato contenuto in 22 troveremo 16, la cui radice 4 esprimerà le diecine di quella di 2209: togliendo in seguito 16 centinaja, ovvero 1600, da 2209, il resto 609 conterrà ancora il doppio prodotto delle diecine per le unità, cioè 560, ed il quadrato delle unità, ovvero 49. Ma il doppio prodotto delle diecine per le unità non avendo cifre di un ordine inferiore alle diecine, deve trovarsi due prime cifre 60 del resto 609, le quali conterranno inoltre le diecine provenute dal quadrato dell'unità. Frattanto, se dividiamo 60 per il doppio delle diecine 8, avremo, trascurandone il resto, un quoziente 7 eguale alle unità cercate. Dipoi, moltiplicando 8 per 7, formeremo il doppio prodotto delle diecine per le unità, cioè 560; il quale tolto dal resto totale

609, otterremo una differenza 49, la quale debb' essere, e lo è difatto, il quadrato dell' unità.

L' operazione, della quale ho sin qui ragionato, si dispone nel modo seguente.

22 , 09	47
16	87
60,9	
60,9	
000.	

Si scrive il numero proposto come se si trattasse di dividerlo per un altro, e si destina per la radice il posto, che dovrebbe occupare il divisore. Dipoi si separano per mezzo d' una virgola le unità, e le diecine, affine di non considerare che le due prime cifre sulla sinistra, le quali debbono contenere il quadrato delle diecine della radice. Si cerca il maggior quadrato 16 contenuto in queste due cifre, si porta la radice 4 al posto, che le è stato destinato, e si toglie 16 da 22; allato del resto 6 s' abbassano le due altre cifre 09 del numero proposto; si separa l' ultima, che non entra nel doppio prodotto delle diecine per le unità; si divide la parte restante a sinistra per 8, doppio del numero delle diecine della radice, il che dà per quoziente le unità 7, e per formar simultaneamente le due ultime parti del quadrato, che deggion esser contenute in 609, si scrive 7 allato di 8, e ne resulta 87 eguale al doppio del numero delle diecine, più le unità, ovvero $2B+C$; il quale essendo moltiplicato per 7, ossia per C, riproduce $609=2B\times C+C^2$, ovvero il doppio prodotto delle diecine per le unità, più il quadrato delle unità: facendo la sottrazione non resta niente, e l' operazion terminata prova che 47 è la radice quadrata di 2209.

Si debba ancora estarre la radice quadrata da 324; dispongo l' operazione nel modo, che segue:

3,24	18
9	
1	28
22,4	
224	
000	

e secondo ciò ch'è stato già detto, trovo 1 per le diecine della radice; queste diecine, essendo raddoppiate, danno il numero 2, pel quale bisogna dividere le due prime cifre 22 del resto. Ora 22 contiene 2 undici volte, e nella radice non solamente non si può avere nè più di 10 nè 10, ma anco il 9 stesso sarebbe troppo grande nel caso attuale, poichè scrivendo 9 allato di 2, e moltiplicando 29 per 9, come la regola lo prescrive, s'avrebbe per resultato 261, il quale non può togliersi da 224. Non si deve dunque riguardare la divisione di 22 per 2 senonchè come un mezzo approssimativo per trovar le unità, e bisogna diminuire il quoziente ottenuto fino a tanto che arrivisi ad un prodotto, che non sorpassi il resto 224: condizione alla quale sodisfa il numero 8, poichè $8 \times 28 = 224$, dunque la radice cercata è 18.

Formando le tre parti del quadrato 18, si trova:

$$B^2 = 100$$

$$2B \times C = 160$$

$$C^2 = 64$$

Totale . . . . . $324 = 18 \times 18$;

e si vede chiaro che le sei diecine, le quali son contenute nel quadrato delle unità, essendo riunite a 160, doppio prodotto delle diecine per le unità, alterano questo prodot-

to di maniera, che la divisione pel doppio delle diecine non può più dare le sole unità.

L' estrazione della radice quadrata d' un numero composto di tre, o quattro cifre, non deve portare difficoltà dopo ciò che precede; ma son per altro necessarie a notarsi alcune particolarità per porre il Lettore in istato d' estrar la radice da un numero espresso da quante cifre si vogliano; e vedremo che ciò dipende dai principj digià spiegati.

Ogni numero intero al di sotto di 100 non avrà che quattro cifre nel suo quadrato; poichè quello di 100 è 10000, ovvero il più piccol numero espresso da cinque cifre. Ciò posto, per esaminare la formazion del quadrato di un numero al di sopra di 100, come di 473, per esempio, si potrà decomporr questo numero in 470+3, ovvero 47 diecine più 3 unità; e per dedurre il suo quadrato dalla formula

$$B^2 \times 2B \times C + C^2$$

saremo B=47 diecine = 470 unità, C=3 unità, d'onde

$$B^2 = 220900$$

$$2B \times C = 2820$$

$$C^2 = 9$$

Totale 223729=473×473.

Si vede perciò in quest' esempio, che il quadrato delle diecine non ha cifre significative d' un ordine inferiore alle centinaja; e ciò debb' essere in generale: poichè le diecine moltiplicate per le diecine producon sempre delle centinaja (*Aritm.* 32).

Dunque nella parte 2237, che resta sulla sinistra del num.° proposto, dopo che n' avrem separate le diecine, e le unità, dobbiamo cercare il quadrato delle diecine; e siccome 473 cade tra 47 diecine, ovvero 470, e 48 diecine, ovvero 480, il 2237 deve cadere tra il quadrato di 47, e quello

di 48; dal che ne segue che il maggior quadrato contenuto in 2237 sarà quello di 47, ovvero quello delle diecine della radice. È dunque evidente che, per trovar queste diecine, bisogna operare come se si volesse estrarre la radice quadrata da 2237; ma in vece di giunger così ad un resultato esatto, si troverà un resto contenente le centinaja formate dal doppio prodotto delle 47 diecine moltiplicate per le unità.

Per effettuare il calcolo, si dispone l'operazione come si vede qui appresso

22,37,29	473
16	87
63, 7	943
60, 9	
282,9	
282,9	
000,0	

Se separano in primo luogo le due ultime cifre 29, e per estrarre la radice dal numero 2237, che resta sulla sinistra, si separano pure le due ultime cifre 37 di questo numero; in questa maniera il numero proposto è diviso in membri di due cifre ciascuno, andando dalla destra verso sinistra. S' opera i primi due membri come abbiam fatto nel numero precedente sul numero 2209, e si ottengono le due cifre della radice 47; ma si trova un resto 28 il quale unito alle due cifre 29 dell' ultimo membro contiene il prodotto di 47 diecine per le unità, ed il quadrato

delle unità. Si separa la cifra 9, la quale non può far parte del doppio prodotto delle diecine per le unità, e si divide 282 per 94, doppio di 47 diecine; scrivendone il quoziente 3 allato del 94, e moltiplicando 943 per 3, viene 2829; numero precisamente eguale all'ultimo resto: e l'operazione è così terminata.

Per far vedere come si debba operare sopra un numero qualunque, passo ad estrar la radice, da 22391824. Qualunque sia questa radice, possiamo sempre concepirla decomposta in diecine, e unità, come negli esempj precedenti. Il quadrato delle diecine non avendo alcuna cifra significativa d'un ordine inferiore alle centinaja, le due ultime cifre 24 non potranno esservi comprese. Si separeranno dunque, e il problema sarà ridotto primieramente a cercare il maggior quadrato contenuto nelle parte 223918, che resta a sinistra. Questa parte essendo composta di più di due cifre, bisogna concludere che il numero, il quale esprime le diecine della radice cercata, ha più d'una cifra; questo numero può dunque anch'esso esser decomposto come gli altri in diecine, e unità. Il quadrato di queste diecine non entrando punto nelle due ultime cifre 18 della parte 223918, sarà dunque nelle cifre 2239, che restano a sinistra, dove bisognerà cercare questo quadrato; e poichè 2239 ha pure più di due cifre, il quadrato ch'egli deve contenere, ne conterrà almeno due nella sua radice: il numero esprimente le diecine, che noi cerchiamo, avrà dunque più d'una cifra: egli è perciò finalmente in 22, che bisogna cercare il quadrato di quel numero, che rappresenta le unità dell'ordine il più elevato della dimandata radice. Da questa serie di ragionamenti, che si possono spingere tanto lontano quanto si vorrà, il numero proposto si troverà diviso in membri, di due cifre andando dalla destra a sinistra: ma è necessario nulladimeno d'essere prevenuti, che l'ultimo membro a sinistra potrà non contenere che una sola cifra.

Il numero proposto essendo così diviso in membri, e distribuito come si vede nell'esempio che segue, s'opera

sul tre primi membri come nell'esempio del numero antecedente; ed allorchè sonosi trovate le prime cifre 473, allato al resto 189 si abbassa il quarto membro 24, e si considera il num. 18924 come contenente il doppio prodotto delle 473 diecine trovate per le unità cercate, più il quadrato di queste unità. Si separa l'ultima cifra 4, e si dividono quelle che restano a sinistra, per 946 doppio di 473; e si fa in seguito la verificazione del quoziente 2, come nelle operazioni antecedenti.

22,39,18,24	4732
16	87
63,9	943
60 9	9462
301,8	
282 9	
1892,4	
1892,4	
0000,0	

L'operazione si termina a questo punto nell'esempio precedente; ma è facil vedere che, se vi fosse un membro di più, le quattro cifre trovate 4732 esprimerebbero le diecine d'una radice, di cui si cercherebbero le unità, e che, per conseguenza, bisognerebbe dividere il resto, che allora si avrebbe, più la prima cifra del membro seguente pel doppio di queste diecine; e così di seguito per ciascuno dei membri ad abbassarsi successivamente uno dopo dell'altro.

Se succedesse che dopo d'avere abbassato un membro, il resto unito alla prima cifra di questo membro non contenesse il doppio delle cifre trovate, bisognerebbe porre zero nella radice; poichè allora la radice non avrebbe unità di quest'ordine: si abbassarebbe in seguito il membro seguente per continuare l'operazione secondo il solito. L'esempio qui unito è relativo a questo caso. Non si sono scritte le quantità da sottrarsi, ma sonosi effettuate le sottrazioni a mente, come nella divisione si è fatto.

49, 42, 09	703
04, 209	1403
00,00,0	

Tutti i numeri proponibili non sono quadrati perfetti;

e gettando gli occhi sulla tavola della pagina 174 si vede, che tra i quadrati di ciascuno dei novi primi numeri esistono delle lacune, ove si comprenderebbero più numeri intermedj consecutivi, i quali non hanno la corrispondente radice, 45, per esempio, non è un quadrato, poichè cade tra 36, e 49. Succederà il più delle volte che il numero, del quale si cercherà la radice quadrata, non l'avrà; ma operando come se il numero l'avesse, il resultato sarà la radice del maggior quadrato possibile, che esso contiene. Se si cerca, per esempio, la radice di 2276, troveremo 47, e resterà 67; lo che dimostra, che il maggior quadrato contenuto in 2276 è quello di 47, ovvero 2209.

Siccome potrebbe restar dubbiezza, dopo d'aver trovata la radice del maggior quadrato contenuto in un numero, d'aver posta qualche cifra troppo piccola nella radice, ecco un mezzo onde riconoscere se il resto sia troppo considerabile, e se la radice trovata sia troppo piccola. Il quadrato di $B+C$ essendo

$$B^2+2B\times C+C^2,$$

se facciamo $=1$, il quadrato di $B+1$ sarà

$$B^2+2B+1;$$

quantità che differisce da B^2, quadrato di B, del doppio di B più l'unità. Dunque, *se la radice trovata dovesse essere aumentata dell'unità; o di più dell'unità, bisognerebbe che il suo quadrato, tolto dal numero proposto, lasciasse un resto almeno eguale a due volte questa radice, più l'unità.* Tutte le volte che questa circostanza non avrà luogo, la radice estratta è sicuramente quella dal maggior quadrato contenuto nel numero proposto.

Poichè, all'effetto di moltiplicare una frazione per una frazione, bisogna moltiplicare i numeratori tra loro, come pure i denominatori, è manifesto che il prodotto d'una frazione per sè stessa, ovvero *il quadrato d'una frazione è eguale al quadrato del suo numeratore, diviso per il quadrato del suo denominatore.* Segue da ciò che, *per*

estrarre la radice quadrata da una frazione, bisogna estrarre quella del suo numeratore, e quella del suo denominatore. Così la radice di $\frac{25}{64}$ è $\frac{5}{8}$, perchè 5 è la radice quadrata di 25, e 8 quella di 64.

È una cosa importantissima da osservarsi, che non solamente i quadrati delle frazioni propriamente dette son sempre delle frazioni, ma che *ogni numero frazionario irriducibile, essendo moltiplicato per se medesimo, darà sempre un numero frazionario anche irriducibile* (a).

Risulta da quest' ultima proposizione, che *tutti i numeri interi, i quali non sono quadrati perfetti, non hanno radice non solamente in numeri interi, ma neppure in numeri frazionarj.* Tuttavia si concepisce che debb' esistere una quantità, la quale moltiplicata per sè stessa produca un numero qualunque, 2276, per esempio, e che in tal caso questa quantità è compresa tra 47, e 48; poichè 47×47 dà un prodotto minore di questo numero, 48×48 ne dà uno maggiore; e dividendo l' intervallo, che v'è tra 47, e 48 in frazioni, si trovan dei numeri frazionarj, i quali moltiplicati per loro stessi danno dei prodotti maggiori del quadrato di 47, minori di quello di 48, ed approssimanti di più in più al numero 2276.

L' estrazione della radice quadrata, applicandola ai numeri, i quali non son quadrati perfetti, dà dunque origine ad una nuova specie di numeri, nello stesso modo che la divisione genera le frazioni: ma evvi questa differenza tra le frazioni, e le radici de' numeri, che non sono quadrati perfetti, cioè, che i primi, i quali si compongono sempre d' un numero esatto di parti dell' unità, hanno con quest' unità una *misura comune*, ovvero un rapporto espresso da numeri, interi, laddovecchè i secondi non l' hanno.

Se, per esempio, si concepisca l' unità come di-

(a) Se ne vegga la dimostrazione nel n.° 97 degli *Elementi d'Algebra*.

visa in cinque parti, e s'esprima con nove di queste parti il quoziente della divisione di 9 per 5, ovvero $\frac{9}{5}$; in tal caso $\frac{1}{5}$, essendo contenuto cinque volte nell'unità, e nove volte in $\frac{9}{5}$, è la *comune misura* dell'unità, e della frazione $\frac{9}{5}$; ed il rapporto di queste unità è quello de' numeri interi 5, e 9.

Considerando che i numeri interi, come pure le frazioni, hanno coll'unità una misura comune, si dice che queste quantità sono *commensurabili* coll'unità, ovvero semplicemente *commensurabili*; e perchè i loro *rapporti*, o *ragioni*, che hanno coll'unità, son espresse da numeri interi, s'indicano pure i numeri interi, e le frazioni sotto la comune denominazione di *numeri razionali*.

Al contrario la radice quadrata d'un numero, il quale non è quadrato perfetto, è *incommensurabile*, ovvero *irrazionale*; perchè, questa non potendo essere rappresentata da alcuna frazione, ne segue che in qualunque numero di parti si supponga divisa l'unità, non ve ne sarà mai alcuna, per quanto piccola sia, che possa misurare nel tempo stesso, ed in una maniera esatta, tanto la radice, quanto l'unità.

Per denotare generalmente una radice da estrarsi, sia che si possa ottenerla esattamente, o nò, ci serviamo del segno $\sqrt{\ }$, che chiamasi *radicale*:

$\sqrt{16}$ è la stessa cosa che 4,

$\sqrt{2}$ è *incommensurabile*, o *irrazionabile*.

Benchè non si possa per mezzo d'alcun numero intero, o frazionario ottenere un'espressione esatta di $\sqrt{2}$, nulladimeno possiamo approssimarvi di tanto quanto si vuole, convertendo questo numero 2 in una frazione, il cui denominatore sia un quadrato, e la radice del numeratore, presa solamente in numeri interi più prossimi alla vera, darà quella del numero proposto, espressa in parti della specie indicata dalla radice quadrata del denominatore.

Se si converta, per esempio, il numero 2 in 25mi, avremo $\frac{50}{25}$. La radice di 50 essendo 7 in numeri interi, e quella di 25 essendo esattamente 5, avremo $\frac{7}{5}$, ovvero $1\frac{2}{5}$ per la radice di 2, valore che differisce dal vero meno d' un quinto.

È manifesto da questa operazione fondata sopra ciò che abbiamo veduto qui sopra, che il quadrato d' una frazione vien espresso da una nuova frazione, che abbia per numeratore il quadrato del numerator primitivo, e per denominatore il quadrato del denominatore parimente primitivo; e ch' essa s' applica a qualunque specie di frazioni che sia, e più facilmente ancora alle decimali, che a tutte le altre. Infatti segue dallo stesso principio, che il quadrato d' un numero espresso in decimi debb'esser composto di centesimi, quello d' un numero espresso in centesimi debb' esserlo in dieci-millesimi, e così di seguito; e che in conseguenza *il numero delle cifre decimali del quadrato è sempre doppio di quello delle cifre della radice.* Quest' ultima osservazione può dedursi ancora dal principio della moltiplicazione dei numeri decimali, come quella che vuole, che un prodotto contenga tante cifre decimali quante ve ne sono insieme in uno dei fattori e nell' altro. Nel caso attuale il numero propsto considerato come il prodotto della sua radice moltiplicata per se stessa, deve avere due volte tante cifre decimali quante n' ha questa radice.

Essendo tutto ben inteso quel che preceda, è facil concludere che, se si vuole ottenere la radice quadrata di 227, per esempio, approssimata fino alle centesime parti, bisogna ridur questo numero in dieci-millesime, e vale a dire, aggiungere quattro zeri alla destra di questo numero, il che darà 2270000 dieci-millesime; dalle quali n'estrarremo la radice come da un consimil numero d' unità: ma per indicare, che il resultato debb' essere in centesime, separeremo con una virgola le due ultime cifre alla destra. Troveremo in questa maniera, che la radice

di 227, coll' errore più piccolo di un centesimo, è 15,06. Eccone l' operazione

2,27,00,00	1506
12,7	25
2 00 00	3006
1964	

Se il numero proposto contenesse di già dei decimali, bisognerebbe rendere il loro numero pari, conforme lo vuole l' estrazione della redice. A fine d' estrarre, per esempio, la radice di 51, 7, si porrebbe uno zero in seguito di questo numero affinchè egli avesse almeno de' centesimi, e s' estrarrebbe in appresso la radice quadrata da 51, 70. Se si volesse avere una decimale di più, si porrebbero due altri zeri in seguito di questo numero; il che darebbe 51,7000, e troverebbesi 7,19 per la sua radice.

Coloro, che vorranno esercitarsi, potranno cercare le radici quadrati de' numeri 2, e 3 con sette cifre decimali; il che esigerà ch' essi pongano quettordici zeri alla destra di questi numeri, e dovran trovare per resultati

$$\sqrt{2}=1,4142136\ ,\quad \sqrt{3}=1,7320508.$$

All' effetto d' approssimarsi alla radice quadrata d' una frazione, l' idea, che ci si offre in principio, è quella di estrarre per approssimazione la radice quadrata dal numeratore, e dal denominatore. Ma con un poco di riflessione ci accorgeremo ben presto che si può evitare una di queste operazioni, facendo in modo che il denominatore sia un quadrato perfetto, e ciò non riducesi ad altro che a moltiplicare i due termini della frazione proposta per questo denominatore. Se si avesse, per esempio, da estrarre la radice quadrata da $\frac{3}{7}$, si cangerebbe questa frazione in

$$\frac{3\times7}{7\times7}=\frac{21}{49}$$

moltiplicando i suoi due termini per il denominatore, 7. La radice del numeratore di quest' ultima frazione, essendo presa in numeri interi, darà $\frac{4}{7}$ per radice quadrata di $\frac{3}{7}$; e questa radice differisce dal vero meno di un settimo.

Ad oggetto di ottenere un maggior grado di esattezza, bisognerebbe convertire, almeno per approssimazione, la frazione $\frac{3}{7}$ in un' altra, il cui denominatore fosse il quadrato di un numero maggiore di 7. Avrebbesi, per esempio, fino ad $\frac{1}{15}$ la radice cercata, se si convertisse $\frac{3}{7}$ in 225^{mi}, poichè 225 è il quadrato di 15; così verrebbe $\frac{675}{7}$ di 225^{mi}, ovvero $\frac{96}{225}$; valore che differisce dal vero meno di $\frac{1}{225}$: la radice di $\frac{96}{225}$ è tra $\frac{6}{15}$ e $\frac{10}{15}$; ma si approssima più alla seconda frazione che alla prima, perchè 96 è più vicino a 100 che 81: si avrebbe dunque $\frac{10}{15}$, oppure $\frac{2}{3}$ per la radice di $\frac{3}{7}$, la quale differisce dal vero meno di $\frac{1}{15}$.

Se si volessero impiegare i decimali per estrarre la radice approssimativa dal numeratore della frazione $\frac{21}{49}$, si troverebbe 4,583 per la radice approssimata del numeratore 21, e si dividerebbe questo resultato per la radice del nuovo denominatore. Spingendo il quoziente fino alla terza cifra decimale, si trova 0,655.

XI. Resta adesso a parlare del metodo, che deve seguitarsi per estrarre la radice terza, o cubica da un numero qualunque.

Prima di tutto convien conoscere i cubi de' numeri composti d'una sola cifra; nella tavola seguente vi sono questi numeri, e i loro rispettivi cubi.

1,	2,	3,	4;	5,	6,	7,	8,	9,
1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729.

Quando dunque si dovrà estrarre la radice cubica da uno de' numeri, che sono nella seconda linea della precedente tavola, questa radice sarà il numero corrispondente al di sopra nella prima linea.

I numeri composti di più d'una cifra hanno i loro cubi composti di più di tre cifre: 10, che è il numero più piccolo di tutti quelli di due cifre, ha per cubo 1000, ch'è il più piccolo de' numeri di quattro cifre.

Per trovare il detto metodo d'estrazione della radice cubica, quando questa è composta di più d'una cifra, esaminiamo ciò che succede nella formazione del cubo d'un numero composto di diecine e d'unità.

Poichè il cubo resulta dal quadrato d'un numero moltiplicato pel numero medesimo, prendiamo la espressione $B^2+2B\times C+B^2$, che, come abbiamo veduto a pag. 153, rappresenta il quadrato d'un numero composto delle due parti B e C, e moltiplichiamola per $B+C$, onde avere quelle che rappsesenta $(B+C)^3$, ovvero il cubo del detto numero $B+C$; otterremo

$$(B+C)^3=$$

$$(B^2+2B\times C+C^2)\times B+(B^2+2B\times C+C^2)\times C;$$

ma

$$(B^2+2B\times C+C^2)\times B=$$

$$B^2\times B+2B\times B\times C+C^2\times B=B^3+2B\times B\times C+B\times C^2$$

(giacchè qualunque sia l'ordine, nel quale si moltiplicano i fattori non cangia di valore il prodotto, *Aritm.* n.° 70),

$$=B^3+2B^2\times C+B\times C^2:$$

e parimente

$$(B^2+2B\times C+C^2)\times C=$$
$$B^2\times C+2B\times C\times C+C^2\times C=B^2\times C+2B\times C^2+C^3;$$

dunque, riunendo, avremo

$$(B+)C^3=$$
$$B^3+2B^2\times C+B\times C^2+B^2\times C+2B\times C^2+C^3$$
$$=B^3+3B^2\times C+3B\times C^2+C^3$$

Supponendo dunque che, B e C rappresentino respettivamente le diecine e le unità, nelle quali può decomporsi un numero qualunque si fa manifesto, che *il cubo, o la terza potenza, d' un numero composto di diecine e di unità contiene quattro parti, cioè, il cubo delle diecine, tre volte il quadrato delle diecine moltiplicato per le unità, tre volte le diecine moltiplicate pel quadrato delle unità, e finalmente il cubo delle unità.*

Formiamo adesso il cubo d' un numero composto di diecine e di unità, per esempio, di 47: decomporremo questo numero in $40+7$, ovvero in quattro diecine più sette unità, onde avremo B eguale a quattro diecine ovvero 40 unità, e C eguale a 7 unità: e sostituendo i valori di $B=40$, $C=7$ nell' espressione $B^3+3B^2\times C+3B\times C^2+C^3$, che rappresenta il cubo di $B+C$, dessa si cangerà in $64000+33600+5880+343=103823$, ch' è appunto il cubo di 47, ovvero $47\times 47\times 47$.

Per ritornare adesso dal cubo 103823 alla sua radice 47, osserveremo primieramente che 64000, cubo delle 4 diecine, non ha cifre significative d' un ordine inferiore alle migliaja; possiam dunque, nella ricerca del cubo delle diecine, far astrazione dalle centinaja dalle diecine e

dalle unità del numero 103823. Dopo di ciò, disponendo l'operazione come per l'estrazione della radice quadrata, separeremo le tre prime cifre sulla destra con una virgola: il maggior cubo contenuto in 103 sarà quello delle diecine. Vedremo dalla tavola precedente, che questo cubo è 64, la cui radice è 4; porremo dunque 4 nel posto destinato per la radice. Si sottrarrà in seguito 64 da 103, ed allato del resto 39 abbasseremo le tre ultime cifre. Il resto totale 39823 conterrà ancora tre parti del cubo, cioè, tre volte il quadrato delle diecine moltiplicato per le unità, ovvero $3B^2 \times C$, tre volte le diecine moltiplicate per il quadrato delle unità, ovvero $3B \times C^2$, ed il cubo delle unità, ovvero C^3. Se s'avesse il valor del prodotto $3B^2 \times C$, siccome si conoscono di già le diecine B, dividendo questo prodotto per $3B^2$, s'otterrebbero le unità C; ma, benchè non conoscasi $3B^2 \times C$, sappiamo frattanto, che questo prodotto non debbe avere alcuna cifra significativa d'un ordine inferiore alle centinaja, poichè desso contiene il fattore B^2, ch'esprime il quadrato delle diecine; non può dunque trovarsi che nella parte 398, che resta del numero 39823, dopo che si son separate le diecine e le unità, parte che contiene inoltre le centinaja che provengono dal prodotto $3B \times C^2$ delle diecine per il quadrato delle unità, ed il cubo C^3 delle stesse unità.

103,823	47
64	48
398,23	

Dividendo 398 per 48, ch'esprime, nell'esempio proposto, il triplo del quadrato delle diecine $3B^2$ ovvero 3×16, troveremo per quoziente 8; ma ciò che precede, fa vedere che non si dee adottar questa cifra per le unità della radice cercata senza averla prima verificata; ciò si fa formando le tre ultime parti del cubo che deve contenere il resto 39823. Facendo $C=8$ si trova

$$3B^2 \times C = 38400$$
$$3B \times C^2 = 7680$$
$$C^3 = 512$$

Totale 46592;

e queste resultato sorpassando 39823, prova che bisogna diminuire il numero 8 preso per le unità. Provando 7 nella stessa maniera si vede, ch' esso sodisfa alle condizioni, e che per conseguenza 47 è la radice cercata.

In vece di fare la verificazione, che ho eseguita, si preferisce per ordinario d' alzare immediatamente al cubo il numero ch' esprimono le due cifre trovate, moltiplicandolo pel suo quadrato. Operando in questa maniera sopra 48, si troverà

$$48 \times 48 \times 48 = 110592;$$

e questo numero essendo maggiore del proposto 103823, mostra pure che la cifra 8 è troppo grande.

Ciò che abbiam praticato sull' esempio qui sopra, deve effettuarsi nella stessa maniera sopra tutti i numeri espressi da più di tre cifre, e meno di sette. Avendo separate le tre prime verso la destra, cercheremo il maggior cubo contenuto nella parte restante a sinistra; porteremo la sua radice nel posto che le è stato destinato; toglieremo questo cubo dalla parte del numero proposto, sulla quale abbiamo operato; allato del resto abbasseremo le tre ultime cifre; separeremo le diecine e le unità; e divideremo ciò che resta a sinistra, per il triplo del quadrato delle diecine trovate: ma prima di scrivere il quoziente alla radice, lo verificheremo alzando al cubo il numero ch' esprime questa cifra unità alle diecine cognite. Se il resultato di quest' operazione è troppo grande diminuiremo la cifra delle unità; procederemo a una nuova verificazione; e così in seguito fino a che non si trovi un resultato eguale al numero proposto, o minore di questo numero, se desso non è un cubo perfetto.

In questo caso la radice trovata non è che quella del maggior cubo, ch' esso contiene. Siccome abbiamo spesso dei resti considerabilissimi, ecco da che cosa potremo conoscere se la cifra delle unità è troppo piccola.

Il cubo di $B+C$, allorchè facciamo $C=1$, divien quello di $B+1$, ed ha per espessione

$$B^3+3B^2+3B+1;$$

quantità, la quale sorpassa B^3, cubo di B, di

$$3B^2+3B+1.$$

Segue da ciò, che *fintantochè il resto di una estrazione della radice cubica sarà minore di tre volte il quadrato della radice, più tre volte la radice, più l' unità, questa radice non sarà troppo piccola.*

Per estrarre la radice cubica da 105823817, osserveremo primieramente, che qualunque sia il numero delle cifre di questa radice, se dessa si decompone in unità, e diecine, il cubo di quest' ultime non potrà far parte delle tre ultime, cifre verso la destra, e dovrà per conseguenza trovarsi in 105823. Ma il maggior cubo contenuto in 105823 avrà più d' una cifra nella sua radice, la quale potrà in conseguenza decomporsi in unità e diecine, ed il cubo di queste diecine, non discendendo al disotto delle migliajà, non potrà far parte delle tre ultime cifre 823. Se, dopo la separazione di queste, restassero sempre più di tre cifre verso la sinistra, si ripeterebbe il ragionamento precedente, ed arriverebbesi così ad indicare il posto del cubo delle unità dell'ordine il più elevato della radice cercata, col dividere il numero proposto in membri di tre cifre, andando dalla destra alla sinistra; l' ultimo potrà contenerne meno di tre.

Ciò posto, dopo d' aver preparata l' operazione secondo il solito, cercheremo primieramente, con la regola pocanzi data, la radice cubica dei due primi membri a sinistra,

e troveremo 47 per resultato; toglieremo il cubo di questo numero dai due membri che lo contengono, allato del resto 2000 abbasseremo il membro seguente 817, ed il numero 2000817 deve contenere le tre ultime parti del cubo di un numero, del quale 47 esprime le diecine, e di cui si cercano le unità: troveremo dunque queste unità, come nell' esempio precedente, separando le due ultime cifre verso la destra del resto, e dividendo la parte a sinistra per 6527, triplo del quadrato di 47. Verificheremo il quoziente 3 alzando 473 a cubo, e troveremo per resultato lo stesso numero proposto, perchè questo numero è un cubo perfetto.

105,823,817	473
64	48
418,23	6627
1038,23	
20 008, 17	
105 823 817	
000 000 000	

La spiegazione dell' esempio qui sopra può tenere il luogo di regola generale. Se il numero proposto avesse un membro di più, si continuerebbe l' operazione come l' abbiam fatto pel terzo, e non bisognerebbe mancare di porre uno zero alla radice se il numero da dividersi sulla sinistra del resto non contenesse quello, pel quale bisogna dividerlo: abbasserebbesi allora il membro seguente, e si opererebbe su questo membro, riunito al resto, come sui precedenti.

Poichè *il cubo d' una frazione s' ottiene moltiplicando questa frazione pel suo quadrato, ovvero, ciò ch' è lo stesso, cubando il suo numeratore, e cubando il suo denominatore*, ne segue, che *ricaderemo sulla radice prendendo quella del nuovo numeratore, e quella del nuovo denominatore.* Il cubo di $\frac{5}{6}$, per esempio, è $\frac{125}{216}$; prendendo la radice cubica di 125, e quella di 216, si trova $\frac{5}{6}$.

Tal' è il metodo, che bisogna seguire allorchè il numeratore e denominatore sono ambedue cubi perfetti: ma allorchè ciò non ha luogo, ci risparmiamo la pena d'estrarre la radice dal denominatore moltiplicando pel suo quadrato

i due termini della frazione proposta; poichè il denominatore resultante da quest' operazione divien il cubo del denominator primitivo, e non resta che a prendere la radice del numeratore. Se si avesse, per esempio $\frac{3}{5}$, moltiplicando i due termini di questa frazione per 25, quadrato del denominatore, avrebbesi

$$\frac{75}{5\times5\times5};$$

la radice del denominatore è 5: quanto a quella di 75, si trova ch' essa è tra 4, 5. Limitandosi a 4, avremo $\frac{4}{5}$ per la radice cubica di $\frac{3}{5}$, prossima al vero colla differenza minore di $\frac{1}{5}$. Per avere una maggior esattezza, bisognerà estrar la radice approssimativa da 75 col mezzo, che indicherò in seguito.

Allorchè il denominatore sarà già un quadrato perfetto, servirà moltiplicare i due termini della frazione per la radice quadrata nel denominatore. Così, per trovar la radice cubica di $\frac{4}{9}$, moltiplico i due termini per 3, radice quadrata di 9, ed ottengo

$$\frac{12}{3\times3\times3}$$

prendendo la radice del maggior cubo 8 contenuto in 12, s' ottiene $\frac{2}{3}$ per la radice cercata; che differisce dal vero meno di $\frac{1}{3}$.

Con un ragionamento analogo a quello, che si è fatto a pag. 183 rispetto alle radici quadrate dei numeri, che

non sono quadrati, riconosceremo, che neppure la radice cubica d'un numero, il quale non è un cubo perfetto, può esprimersi esattamente per alcuna frazione, comunque grande sia il suo denominatore: dessa sarà dunque una quantità irrazionale.

Il miglior mezzo d'impiegare le frazioni ordinarie per questa ricerca, consiste nell'estrarre la radice in frazioni di una specie data. Affine di conseguir, per esempio, la radice cubica di 22, che differisca dal vero meno della quinta parte dell'unità, osserveremo che il cubo di $\frac{1}{5}$ è $\frac{1}{125}$, e ridurremo in conseguenza 22 in $\frac{2750}{125}$: essendo 14 la radice cubica di 2750 presa in numeri interi, avremo $\frac{14}{5}$, ovvero $2\frac{4}{5}$ per quella di 22.

Il mezzo, ch'è piu in uso ond'estrarre per approssimazione la radice cubica d'un numero, consiste nel convertire questo numero in frazione decimale; ma è da osservarsi, che ciò non può essere se non in millesime, o in millionesime parti ec., perchè le decime divengon millesime allorchè s'alzano alla terza potenza, le centesime si cangiano in millionesime, ed in generale *il numero delle cifre decimali, che si trovano nel cubo, è triplo di quella, che ne contien la radice.* Bisogna concludere da ciò, che si deve porre in seguito del numero proposto tre volte tanti zeri quanti sono i decimali, che si vogliano nella sua radice. Faremo in appresso l'estrazione secondo le regole precedentemente esposte, e separeremo nel resultato il numero di cifre decimali richiesto.

Se si volesse aver, per esempio, la radice cubica di 327, che differisca dal vere meno d'un centesimo, si scriverebber sei zeri in seguito a questo numero, e s'estrarrebbe, secondo la regola, la radice da 327000000. Eccone l'operazione

327,000,000	688
216	108
	13872
1110,00	
3144 32	
125 680,00	
3256 606 72	
13 393 28.	

Si separerebbero in seguito due cifre decimali sulla destra del resultato, e s'avrebbe 6,88: ma sarà più esatto il prendere 6,89, perchè il cubo dell'ultimo numero, benchè maggiore di 327, si approssima più di quello di 6,88.

Se il numero proposto contenesse già dei decimali, bisognerebbe, prima di cominciar l'estrazione, porre alla sua destra tanti zeri quanti ne sarebbero necessarj per rendere il numero delle cifre decimali multiplice di 3. Sia, per esempio, 0,07; scriveremo 0,070: prendendo la radice di 70 millesime, troveremo 0,4. Per ispingere l'esattezza fino ai centesimi, bisognerebbe porre altri tre zeri, il che farebbe 0,070000. La radice di 70000, estratta in numeri interi, essendo 41, quella di 0,07, esatta fino ai centesimi, sarà 0,41.

Fine del Supplemento.

PARAGONE

DELLE ANTICHE MISURE FRANCESI COLLE NUOVE.

Caratteri usati nel dinotare le antiche misure.

Per le monete:

^{l} lira tornese, ^{s} soldo, ^{d} denaro (137).

Per il tempo.

^{g} giorno, ^{o} ore, $'$ minuto primo, $''$ secondo.

Pei pesi.

lb. libra, M marco, O ovvero ℥ oncia; G ovvero 3 grosso, D ovvero ʒ denaro o scropolo, G grano (136).

Osservazione. Il denaro, o scropolo equivale a $\frac{1}{3}$ del grosso, ovvero a 24 grani.

Misure di lunghezza.

tesa, ^{pi} piedi, ^{po} pollice, ^{l} linea, ^{pt} punto (131).

Osservazione. Le distanze alcune volte si misurano in passi ordinarj, considerati ciascuno $2^{pi}\ \frac{1}{2}$, ed in passi geometrici ovvero braccia di 5^{pi}.

Dimensioni esatte dalla terra.

Il raggio dell'equatore è di 3 271 208 tese.

Il semi-asse, ovvero la distanza del centro al popolo, è di 3261 443 tese.

La distanza dal polo all'equatore, misurata sul meridiano di Parigi è di 51 30740 tese.

Il grado terrestre, ch'è la 90ma parte della detta distanza, equivale dunque a 57008 tese.

L'arco terrestre d'un minuto primo è in conseguenza di circa 950 tese.

Tavole calcolate del Sig. Haros per la conversione delle misure antiche in nuove, e reciprocamente.

Ciascuna colonna contiene, nella prima linea, il valore della misura indicata nel titolo della colonna, ed in seguito i prodotti di questo valore pei numeri scritti nella colonna segnata N.

Vi sono per tutto cinque decimali, ma nell'uso ordinario possiamo limitarci a tre.

Convertire 8 tese, 5 piedi e 7 pollici in metri

8t. equivalgono a	15m.	,592
5pied.....	1	,624
7poll.....	0	,189
Somma.....	17m.	,405

Risposta 17 metri, e 40 centimetri

Convertire 89 aune $\frac{3}{4}$ di Parigi in metri.

80aun equivalgono a	95m.	,076
9.....	10	,696
$\frac{3}{4}$.....	0	,891
Somma.....	106m.	,663

Risposta 106 metri, e 66 centimetri.

Convertire 218 arpenti (*acqua e foreste*) in ecatare-

200arp. equivalgono a 102ecat. ,144
10..... 5 ,107
8..... 4 ,086

Somma.....111ecat. ,337

Risposta 111 ecatare e 34 are in circa.

Convertire 3050 libbre in chiliogrammi

3000 lib. equivalgono a 1468chil. ,52
50.... ..... 24 ,48

Somma.... 1493chil. ,00

Risposta 1493 chiliogrammi.

Le medesime tavole possono dare il prezzo della nuova unità d'una materia per mezzo di quello della antica unità espresso in franchi. Per esempio, l'auna del drappo costando 37fr, 50, è manifesto che, se si conoscesse l'espressione del metro in auna, altro non dovrebbe farsi che moltiplicare quest'espressione per 37, 5, il che ridurrebesi a convertire 37m., 5 in aune, ed in parti decimali dell'auna; ma bisognerebbe contare il risultato per dei franchi. Ecco il calcolo di quest'esempio.

Mediante la tavola, che converte i metri in aune,

30 equivalgono a 25aun. ,243
7 .....5 ,890
0 , 5.....0 ,421

Somma 37m., 5.....31aun. ,554;

e prendendo questo risultato per dei franchi, si trova 31 fr., 55 cent. per il prezzo del metro del drappo.

Allorchè si vogliono convertire le nuove misure nell'antiche, non si ottengono, mediate le tavole seguenti, se non che degl'interi, e delle frazioni decimali, e resta da convertire queste frazioni in suddivisioni proprie a ciascuna specie di misura.

Tavola per ridurre un numero qualunque di Misure *lineari* antiche in misure nuove, e reciprocamente.

N.	Leghe terrestr. in Chil. *	Leghe marine in Chil. **	Tese in Metri.	Piedi in Metri.	Pollici in Metri.	Linee in Metri.
1	4,4444	5,5556	1,94904	0,32484	0,027070	0,002256
2	8,8889	11,1111	3,89807	0,64968	0,054140	0,004512
3	13,3333	16,6667	5,84711	0,97452	0,081210	0,006768
4	17,7778	22,2222	7,79615	1,29936	0,108280	0,009024
5	22,2222	27,7778	9,74519	1,62420	0,135330	0,011280
6	26,6667	33,3333	11,69422	1,94904	0,162519	0,013536
7	31,1111	38,8889	13,64326	2,27388	0,189489	0,015792
8	35,5556	44,4444	15,59230	2,59872	0,216559	0,018048
9	40,0000	50,0000	17,54133	2,92356	0,243629	0,020314
10	44,4444	55,5556	19,49037	3,24840	0,270699	0,022560

N.	Chiliom. in Leghe terrestri.	Chiliom. in Leghe marine.	Metri in Tese.	Metri in Piedi.	Metri in Pollici.	Metri in Linee.
1	0,225	0,18	0,51307	3,07844	36,9413	443,296
2	0,450	0,36	1,02615	6,15689	73,8827	886,592
3	0,675	0,54	1,53922	9,23533	110,8240	1329,888
4	0,900	0,72	2,05230	12,31378	174,7653	1773,184
5	1,125	0,90	2,56537	35,39222	184,7067	2216,480
6	1,350	1,08	3,07844	18,47066	221,6480	2659,775
7	1,575	1,26	3,59152	21,54911	258,5893	3103,071
8	1,800	1,44	4,10459	24,62755	295,5306	3546,367
9	2,025	1,62	4,61767	27,70600	332,4720	3989,663
10	2,250	1,80	5,13074	30,78444	369,4133	4432,959

* La Lega di 25 a grado equivale à tese 2280, 33 in conseguenza del valore *definitivo* del Metro.

** La Lega marina di 20 a grado equivale a 2850 tese, 41.

Tavola per ridurre le Aune e sue frazioni in metri, e reciprocamente.

N.	Aune in metri *.	N.	Frazioni d' Auna in metri.	N.	Frazioni d' Auna in metri.	N.	Frazioni d' Aune in metri.
1	1,18845	$\frac{1}{8}$	0,594	$\frac{5}{8}$	0,743	$\frac{2}{16}$	0,520
2	2,37689	$\frac{1}{3}$	0,396	$\frac{7}{8}$	1,040	$\frac{9}{16}$	0,668
3	3,56534	$\frac{2}{3}$	0,792	$\frac{1}{12}$	0,099	$\frac{11}{16}$	0,817
4	4,75378	$\frac{1}{4}$	0,297	$\frac{5}{12}$	0,495	$\frac{13}{16}$	0.966
5	5,94223	$\frac{3}{4}$	0,891	$\frac{7}{12}$	0.693	$\frac{15}{16}$	1,114
6	7,13068	$\frac{1}{6}$	0,198	$\frac{11}{12}$	0,189		
7	8,31912	$\frac{5}{6}$	0,990	$\frac{1}{16}$	0,074		
8	9,50757	$\frac{1}{8}$	0,149	$\frac{3}{16}$	0,223		
9	10,69601	$\frac{3}{8}$	0,446	$\frac{5}{16}$	0,371		
10	11,88449						

N.	Metri in Aune di Parigi.
1	0,84144
2	1,68287
3	2,52431
4	3,36574
5	4,20718
6	5,04861
7	6,89005
8	6,73148
9	7,57292
10	8,41435

* L' Auna di Parigi equivale a 3 piedi, 7 pollici, 10 linee $\frac{1}{2}$.

Tavola per ridurre un numero qualunque di misure *agrarie* antiche in misure nuove e viceversa.

N.	Tese quadrate in metri quadrati.	Piedi quadrati in metri quadrati.	Pollici quadrati in metri quadrati.	Linee quadrate in metri quadrati.
1	3,798744	0,105521	0,00073278	0,000005089
2	7,597487	0,211041	0,00146556	0,000010178
3	11,396231	0,316562	0,00219834	0,000015267
4	15,194975	0,422083	0,00293112	0,000020356
5	18,993718	0,527604	0,00366390	0,000025445
6	22,792462	0,633124	0,00439668	0,000030534
7	26,591205	0,738645	0,00512946	0,000035623
8	30,389949	0,844166	0,00586224	0,000040712
9	34,188693	0,949686	0,00659502	0,000045801
10	37,987436	1,055207	0,01732780	0,000050890

N.	Metri quadrati in tese quadrate.	Metri quadrati in piedi quadrati.	Metri quadrati in pollici quadrati.	Metri quadrati in linee quadrate.
1	0,263245	9,47682	1364,66	196511
2	0,526490	18,95363	2729,32	393023
3	0,789735	28,43045	4093,99	589534
4	1,052980	37,90726	54,5865	786045
5	1,319225	47,38408	6823,31	982557
6	1,579469	56,86090	8187,97	1179068
7	1,842714	66,33771	9552,63	1375579
8	2,105959	75,81453	10917,30	1572090
9	2,369204	85,29134	12281,96	1768602
10	2,632449	94,76816	13646,62	1965113

Continuazione della tavola precedente.

N.	Leghe quadrate in metri quadrati.	Leghe quadrate in miriare.	Arpento di Acque e Foreste in ecatare ovvero pertiche quadr. in are.	Arpento di Parigi in ecatare ovvero pertiche quadr. in are.
1	0,197530 9	19,75309	0,560720	0,341887
2	0,3950617	39,50617	1,021440	0,683774
3	0,5925926	59,25926	1,532160	1,025661
4	0,7901234	79,01234	2,042880	1,367548
5	0,9876543	98,76543	2,553600	1,709435
6	1,1851852	118,51852	3,064320	2,051312
7	1,3827160	138,27160	3,575040	2,393209
8	1,5802469	158,02469	4,085760	2,735096
9	1,7777777	177,77777	4,596480	3,076983
10	1,9753086	197,53086	5,107200	3,418870

N.	Miriametri quadrati in leghe quadrate.	Miriare in leghe quadrate.	Ecatare in erpento di Acque e Foreste ovvero are in pertiche quadrate.	Ecatare in arpento di Parigi ovvero in are pertiche quadr.
1	5,0625	0,050625	1,958020	2,924943
2	10,1250	0,101250	3,916040	5,849886
3	15,1875	0,151875	5,874060	8,774829
4	20,2500	0,202500	7,832080	11,699772
5	25,3125	0,253125	9,790100	14,624715
6	30,3750	0,303750	11,748120	17,549658
7	35,4375	0,354375	13,706140	20,475601
8	40,5000	0,405000	15,664160	23,399544
9	45,5625	0,455625	17,622180	26,334487
10	50,6250	0,506250	19,580200	29,249430

Tavola per ridurre un numero qualunque di Misure *cubiche* antiche in Misure nuove, e reciprocamente.

N.	Tese cubi in metri cubi.	Piedi cubi in metri cubi.	Pollici cubi in metri cubi	Linee cube in metri cubi.
1	7,40389	0,0342773	0,000019836	0,00000001148
2	14,80778	0,0685545	0,000039673	0,00000002296
3	22,21167	0,1028318	0,000059509	0,00000003444
4	29,61556	0,1371090	0,000079346	0,00000004592
5	37,01945	0,1713863	0,000099182	0,00000005740
6	44,42334	0,2056636	0,000119018	0,00000006888
7	51,82723	0,2399408	0,000138855	0,00000008036
8	59,23112	0,2742181	0,000158691	0,00000009184
9	66,63501	0,3084953	0,000178528	0,00000010332
10	74,03890	0,2427726	0,000198364	0,00000011480

N.	Metri cubi in tese cubi.	Metri cubi in piedi cubi.	Metri cubi in pollici cubi.	Metri cubi in linee cubi.
1	0,135064	29,1729	50412,42	87112655
2	0,270128	58,3477	100824,83	174225310
3	0,405192	87,5216	151237,25	261337965
4	0,540257	116,6954	201649,66	348450619
5	0,675321	145,8693	252062,08	435563274
6	0,810385	175,0431	302474,50	522675929
7	0,945449	204,2170	352886,91	609788584
8	1,080513	233,3908	403299,33	696901239
9	1,215577	261,5647	453711,74	784014894
10	1,550641	291,7385	504124,16	971126549

Continuazione della tavola precedente.

N.	Corde di legna (Acqua e Foreste) in steri.	Solive (da costruzione) in steri overo metri cubi.
1	3,8391	0,10283
2	7,6781	0,20566
3	11,5172	0,30850
4	15,3562	0,41133
5	19,1953	0,51416
6	23,0343	0,61699
7	26,8734	0,71982
8	30,7124	0,82265
9	34,5515	0,92549
10	38,3905	1,02882

N.	Steri in Corde di legna (Acqua e Foreste).	Metri cubi di Solive (da costruzione).
1	0,26048	9,7246
2	0,52096	19,4492
3	0,78144	29,1739
4	1,04192	38,8985
5	1,30241	48,6231
6	1,56289	58,3477
7	1,82337	68,0723
8	2,08385	77,7970
9	2,34433	87,5216
10	2,60481	97,2462

Tavola per ridurre un numero qualunque di misure di *capacità* antiche in misure nuove, e reciprocamente.

N.	Pinte di Parigi in litri.	Moggia di vino di Parigi in ecatolitri.	Sestierie o staio di grano di Parigi in ecatolitri.	Boisseaux in litri.	Litrons in litri.
1	0,9343	2,6822	1,5610	13,008	0,8130
2	1,8626	5,3644	3,1220	26,017	1,6260
3	2,7940	8,0466	4,6830	39,025	2,4391
4	3,7253	10,7288	6,8050	52,033	3,2521
5	4,1566	13,4110	7,2440	65,042	4,0651
6	5,5879	16,0932	9,3660	78,050	4,8781
7	6,5192	18,7754	10,9270	91,058	5,6911
8	7,4506	21,4576	12,4880	104,066	6,5042
9	8,3819	24,1398	14,0490	117,075	7,3172
10	9,3132	26,8220	15,6100	130,083	8,1302

N.	Litri in pinte di Parigi.	Ecatolitri in moggia di vino di Parigi.	Ecatolitri in sestieri o staia di grano di Parigi.	Litri in boisseaux.	Litri in litrons.
1	1,0737	0,3728	0,6406	0,07687	1,2300
2	2,1475	0,7457	1,2812	0,15375	2,4600
3	3,2212	1,1185	1,9219	0,23062	3,6900
4	4,2950	1,4913	2.5625	0,30750	4,9199
5	5,3687	1,8642	3,2031	0,38437	6,1499
6	6,4424	2,2370	3,8437	0,46124	7,3799
7	7,5162	2,6098	4,4843	0,53812	8,6099
8	8,5699	0,9826	5,1250	0,61499	9,8399
9	9,6637	3,3555	5,7656	0,69187	11,0699
10	10,7374	3,7283	6,4062	0,76874	12,2998

Tavola per ridurre un numero qualunque di *Pesi* antichi in Pesi nuovi, e reciprocamente.

N.	Libbre in chiliogram.	Oncie in chiliogram.	Grossi in chiliogrammi	Grani in chiliogrammi	Quintali in mirigrammi.
1	0,48951	0,03059	0,003824	0,0000531	4,8951
2	0,97901	0,06119	0,007648	0,0001062	9,7901
3	1,46852	0,09178	0,011472	0,0001593	14,6852
4	1,95802	0,12238	0,015296	0,0002124	19,5802
5	2,44753	0,15297	0,019120	0,0002655	24,4753
6	2,93704	0,18356	0,022944	0,0003186	29,3704
7	3,42654	0,21416	0,026768	0.0004717	34,2654
8	3,91605	0,24475	0,030592	0,0004248	39,1605
9	5,40355	0,27535	0,034416	0,0004779	44,0555
10	4,89506	0,30594	0,038240	0,0005310	48,9506

N.	Chiliogram. in libbre.	Chiliogram. in oncie.	Chiliogram. in grossi.	Chiliogram. in grani.	Mirigrammi in quintali.
1	2,04283	32,686	261,49	18827,15	0,20429
2	4,08575	65,372	522,98	37654,30	0,40858
3	6,12863	98,058	784,46	66481,45	0,61286
4	8,17150	130,744	1045,95	95308,60	0,81715
5	10,21438	163,430	1307,44	94135,75	1,02144
6	12,25726	196,106	1568,93	112962,90	1,22573
7	14,30013	228,802	1830,42	131790,05	1,43001
8	16,34301	261,488	2091,90	150617,20	1,63430
9	18,38588	294,174	2353,39	169444,35	1,83859
10	20,42876	326,860	2614,88	188271,50	2,04288

PARAGONE

DI ALCUNE MISURE STRANIERE, CON LE NUOVE MISURE FRANCESI.

MISURE LINEARI.

	Millim.
Antico piede francese. . .	324,7
Piede inglese	304,7
Vara di Castiglia	836,6
Piede del Reno	313,9
—— di Vienna	316,0
—— di Amsterdam . . .	283,6
—— di Svezia	297,1
—— di Russia.	354,1
—— della China	320,0
Palmo di Napoli	263,67
—— di Sicilia	258,19

PESI.

	Gram.
Libbra peso di marco . . .	489,2
—— inglese { detta *troy* . .	372,6
—— inglese { detta *avoir dupois*	453,1
—— di Castiglia. . . .	459,4
—— di Cologna. . . .	467,4
—— di Amsterdam. . .	491,4
—— di Vienna	558,6
—— di Svezia	424,6
—— di Russia	409,5
—— di Napoli	320,8
—— di Sicilia	313,7

TAVOLA comparativa delle monete straniere con le monete francesi, supposte tutte dritte (esatte) di peso e di titolo dietro la legge di fabbricazione. (Estratto dall'Annuario del 1821.

N. B. Il titolo è le quantità di metallo puro (o di fino) contenuto nell' intiero pezzo, che si suppone composto di 1000 parti. Il titolo del franco è $\frac{10}{9}$, ossia 0,900; il suo peso essendo di 5 grammi, esso contiene $\frac{9}{2}$ grammi di argento; perciò, fatto astrazione delle spese di cuneazione, il grammo d' argento vale $\frac{2}{9}$ di franco, ed il chilogrammo $\frac{2000}{9}$ di franco, ossia 222 franchi, e 22 centesimi, il chilogrammo di oro vale 3444 franc. 44 cent., il rapporto del valore dell' oro e quello dell' argento essendosi stabilito di $15\frac{1}{2}$ ad 1.

Natura.	DENOMINAZIONE delle monete.	PESO legale.	TITOLO legale.	VALORE.
	INGHILTERRA.	g		f c
Oro.	Ghinea di 21 scellini . . .	8,3802	917	26,47
	Mezza	4,1901	917	13,23,50
	Un quarto	2,095	917	6,61,75
	Un terzo, ovvero 7 scellini .	2,7934	917	8,82,33
	Sovrano dopo 1818, di 20 scellini.	7,9808	917	25.20,80
Arg.	Crovvn, o corona di 5 scellini antichi	30,074	925	6.18
	Scellino antico	6,015	925	1.23,60
	Crovvn, o corona dopo 1818.	28,2514	925	5.80,72
	Scellino, dopo 1818 . . .	5,6503	925	1.16,14

Natura.	DENOMINAZIONE delle monete.	PESO legale.	TITOLO legale.	VALORE.
	AUSTRIA E BOEMIA.	gr.		fr. c
Oro.	Ducato dell'Imperatore. . .	3,491	986	11.86
	Ducato di Ungheria. . . .	3,491	990	11.90
	Sovrano.	5,567	917	17.58
	Mezzo	2,7835	917	8.79
Arg.	Scudo, o ristallero di convenzione dopo 1753	28,064	833	5.19,50
	Mezzo risdallero, o fiorino .	14,032	833	2.59.75
	Venti kreutzers	6,682	583	0.86,50
	Dieci kreutzers	3,898	500	0.43,25
	OLANDA.			
Oro.	Ducato	3,512	986	11.93
	Ridero	9,988	920	31.65
	Venti fiorini, 1808. . . .	13,659	917	43.14
	Dieci fiorini, *idem*	6,8295	917	21.57
	—— di Guglielmo, 1818. .	6,700	900	20.77
Arg.	Fiorino di 20 soldi.	10,597	917	2.15,94
	Escalino, o pezzo di 6 soldi.	4,976	583	6.64
	Ducatone, o ridero	32,750	941	6.85
	Ducato, o risdallero . . .	28,230	873	5.48
	DANIMARCA ED HOLSTEIN.			
Oro.	Ducato corrente dopo 1767. .	3,143	875	9.47
	Ducato del 1791 al 1802 . .	3,519	979	11.86
	Cristiano 1773	6,735	903	20.95
Arg.	Risdallero, o doppio scudo di 96 scellini Danesi, dopo 1776.	29,126	875	5.66
	Risdallero corrente, o pezzo di 6 M. Dan. del 1750 . . .	26,800	833	4.96
	Marco danese di 16 scellini, del 1776.	» »	688	0.94
	Marco di Lubeck di 16 scellini, del 1740.	9,164	750	1.53
	STATO ECCLESIASTICO.			
Oro.	Doppia di Pio VI e Pio VII. .	5,471	916 $\frac{2}{3}$	17.27,50
	Mezza	2,7355	916 $\frac{2}{3}$	8.63,75
	Zecchino, 1769, Clemente XIV e suoi successori . .	3,426	1000	11.80

Natura.	DENOMINAZIONE delle monete.	PESO legale.	TITOLO legale.	VALORE.
	STATO ECCLES. (seguita)	gr.		fr. c
Oro.	Mezzo	1,713	1000	5.90
Arg.	Scudo di 10 paoli, o 100 bajocchi.	26,437	916 $\frac{2}{3}$	5.38,50
	Tre decini di scudo, o testone di 30 bajocchi	7,931	916 $\frac{2}{3}$	1.62
	Un quinto di scudo, o papetto di 20 bajocchi. . .	5,287	916 $\frac{2}{3}$	1.08
	Un decimo di scudo, o paolo di 10 bajocchi.	2,644	916 $\frac{2}{3}$	0 54
	SPAGNA.			
Oro.	Doppia, o dublone di 8 scudi, 1772 al 1786. . . .	27,045	901	83.93
	—— di 4 scudi.	13,5225	901	41.96,50
	—— di 2 scudi.	9,7613	901	20.98,25
	Mezza doppia; o scudo . .	3,3806	901	10,49,12
	Doppia o dublone di 8 scudo, dopo 1786	27,045	875	81.51
	—— di 4 scudi.	13,5225	875	40.75,50
	—— di 2 scudi.	6,7613	875	20.37,75
	Mezza pistola, o scudo. . .	3,3806	875	10.18,87
Arg.	Piastra, dopo 1772. . . .	27,045	903	5.43
	Reale di 2, o pezzetto, o $\frac{1}{8}$ di piastra	5,971	813	1.08
	Reale di 1, o pezzetto, o $\frac{1}{10}$ di piastra.	2,9855	813	0.54
	Realillo, o $\frac{1}{20}$ di piastra. .	1,4928	813	0.27
	Nota. Queste tre ultime monete sono denominate *monete provinciali*; esse sono coniate in Ispagna e non hanno corso che nella penisola.			
	AMBURGO.			
Oro.	Ducato *ad legem imperii* . .	3,491	986	11.86
	Ducato nuovo della città . .	3,488	979	11.76
Arg	Marco bianco (*moneta immaginaria*).	» »	» »	1.88

Natura.	DENOMINAZIONE delle monete.	PESO legale.	TITOLO legale.	VALORE.
	AMBURGO (seguita).	gr.		fr. c
Arg.	Marco o 16 scellini, dopo la convenzione di Lubek . .	9,164	750	1.53
	Rislallero di constituzione, o scudo di banco	29,233	889	5.78
	TOSCANA.			
Oro.	Ruspone, o 3 zecchini . . .	10,464	1000	36.04
	Un terzo di ruspone, o zecchino.	3,488	1000	12,01,33
	Mezzo zecchino	1,744	1000	6,00,67
	Zecchino à l'effigia	3,488	1000	12,01,33
	Rosina	6.976	896	21.54
	Mezza	3,488	896	10.77
Arg.	Francescone di 10 paoli, livornina, piastra alla rosa; tallaro; leopoldina e scudo di 10 paoli	27,507	917	5.61
	Pezza di 5 paoli	13,753	917	2.80,50
	—— di 2 paoli	5,501	917	1.12,20
	—— di 1 paolo	2,751	917	0.56,10
	SVIZZERA			
Oro.	Pezza di 32 *franchi* di svizzera	15,297	904	47.63
	—— di 16	7,6485	904	23.81,50
	Ducato di Zurigo.	3,491	979	11,77
	—— di Berna	3,452	979	11.64
	Pezzo di Berna di 16 franchi di Svizzera chiamata Luigi.	7,648	902	23.76
Arg.	Scudo di Basilea di 30 *batz*, o 2 fiorini	23,386	878	4.56
	Mezzo scudo o fiorino di 15 *batz*.	11,693	878	2.28
	Franco di Berna, dopo 1803.	7,512	900	1.50
	Scudo di Zurigo, del 1781 .	23,657	844	4.70
	Mezzo, o fiorino, del 1781 .	12,5285	844	2.35
	Scudo di 40 *batz* di Basilea e di Soleure, dopo il 1788 .	29,480	901	5.90
	Pezza di 4 *franchi* di Berna, 1799	29,370	901	5.88

Natura.	DENOMINAZIONE delle monete.	PESO legale.	TITOLO legale.	VALORE.
	SVIZZERA (seguita).	gr.		fr. c
Arg.	Pezza di 4 *franchi* di Svizzera, nel 1803	30,049	900	6.00
	—— di 2 franchi di Svizzera, nel 1803	15,0245	900	3.00
	—— di 1 *franco* di Svizzera, nel 1803.	7,5125	900	1.50
	NAPOLI.			
Oro.	Il titolo de' ducati è troppo variabile per poterne dare il valore in monete francesi.	» »	» »	» »
	Oncia nuova di 3 ducati del 1818	3,786	996	12.99
	Oncia di 15 ducati, del 1818.	18,933	996	64.95
	Oncia di 30 ducati, del 1818.	37,865	996	129.90
Arg.	Pezza di 12 carlini, del 1804.	27,533	833 $\frac{2}{3}$	5.10
	Ducato di 10 carlini di 100 grana del 1784	22,810	839 $\frac{2}{3}$	4.25
	2 Carlini, del 1804. . . .	4,589	833 $\frac{2}{3}$	0.85
	1 Carlino, del 1804. . . .	2,2945	833 $\frac{2}{3}$	0.42,5
	Ducato di 10 carlini, del 1818	22,943	838 $\frac{2}{3}$	4.25
	PARMA			
Oro.	Zecchino	3,468	1000	11.95
	Doppia del 1784.	7,498	891	23.01
	Doppia del 1786 al 1791. .	7,141	891	21.91,50
	40 lire di Maria-Luisa, del 1815	12 9032	900	40.00
	20 lire di Maria-Luisa, del 1815.	6,4516	900	20.00
Arg.	Ducato del 1784 e 1796 . .	25,707	906	5.18
	Pezza di 3 lire del 1790 . .	3,672	833	0.68
	—— di una lira, 10 soldi del 1790.	1,836	833	0.34
	5 lire di Maria-Luisa del 1815	25,000	900	5. »
	2 lire, 1 lira, $\frac{1}{2}$ ed $\frac{1}{4}$ di lira, a proporzione. . . .	» »	» »	» »

Natura.	DENOMINAZIONE delle monete.	PESO legale.	TITOLO legale.	VALORE.
	GENOVA.	gr.		fr. c.
Oro.	Zecchino	3,487	1000	12.01
	PORTOGALLO.			
Oro.	Moeda duro, lisbonina di 4800 rèes	10,752	917	33.96
	Mezza moeda, mezza lisbonina di 2400 rèes.	5,376	917	16.98
	Quartino, quarto di lisbonina, di 1200 rèes	2,688	917	8.49
	Mezza doppia portoghese di 6400 rèes	14,334	917	45.27
	Mezza portoghese di 3200 rèes.	7,167	917	22.63,50
	Pezza di 16 testoni di 1600 rèes.	3,583	917	11.31,75
	—— di 12 testoni di 1200 rèes.	2,538	917	8.02
	—— di 8 testoni di 800 rèes.	1,792	917	5.66
	Cruzade di 480 rèes	1,045	917	3.30
Arg.	Cruzade nuovo di 480 rèes .	14,633	903	2.94
	1000 rèes	» »	»	6.12,50
	PRUSSIA.			
Oro.	Ducato	3,491	979	11.77
	Federico	6,689	903	20.80
	Mezzo	3,3445	903	10.40
Arg.	Reichsthaler di 24 buoni grossi, del 1767 al 1807 . .	22,298	750	3.71,63
	Mezzo, o 12 buoni grossi . .	11,149	750	1.85,81
	Grosso	» »	»	0.15,48
	RAGUSA.			
Oro.	*Non ve ne sono*			
Arg.	Tallero, detto ragusina . .	29,400	600	3,90
	Mezzo	14,700	600	1.95
	Ducato	13,666	450	1.37
	12 grossette.	4,140	450	0.41
	6 grossette	2,070	450	0.20,50
	RUSSIA.			
Oro.	Ducato del 1755 al 1763 . .	3,495	979	11.79
	—— del 1763	3,473	969	11.59

Natura.	DENOMINAZIONE delle monete.	PESO legale.	TITOLO legale.	VALORE.
	RUSSIA (seguita).	gr.		fr. c.
Oro.	Imperiale di 10 rubli, del 1755 al 1763	16,585	917	52.38
	Mezzo, di 5 rubli, del 1755 al 1763	8,2925	917	26.19
	Imperiale di 10 rubli, dopo il 1763	13,073	917	41.29
	Mezzo di 5 rubli, dopo il 1763.	6,5365	917	20.64,50
Arg.	Rublo di 100 copecchi del 1750 al 1752	25,870	802	4.61
	—— dopo il 1763 al 1807. .	24,011	750	4.00
	SARDEGNA.			
Oro.	Carlino dopo il 1768. . . .	16,056	892	49.33
	Mezzo carlino	8,028	892	24.66,50
	Doppia	9,118	906	28.45
	Mezza doppia	4,559	906	14.22,50
Arg.	Scudo, dopo il 1768 . . .	23,590	896	4.70
	Mezzo scudo	11,795	896	2.35
	Quarto di scudo, ossia una lira	5,8975	896	1.17,50
	Scudo nuovo di 5 lire, 1816.	25,000	900	5.0
	SAVOJA E PIEMONTE.			
Oro.	Zecchino	3,468	1000	11.94,50
	Doppia nuova di 24 lire . .	9,620	906	30.00
	Mezza doppia di 12 lire . .	4,810	906	15.00
	Carlino dopo il 1755 . . .	48,100	906	150.00
	Mezzo carlino.	24,050	906	75,00
	Doppia nuova di 20 lire, del 1816	6,4516	900	20,00
Arg.	Scudo di 6 lire del 1755 . .	35,118	906	7.07
	Mezzo scudo	17,559	906	3.53,50
	Un quarto, o 30 soldi. . .	8,7795	906	1.76,75
	Mezzo quarto, o 15 soldi. .	4,3897	906	0.88,37
	Scudo nuovo, del 1816 . .	25 »	900	5.00
	SASSONIA.			
Oro.	Ducato	3,491	985	11.86
	Doppio Augosto, o 10 tallari.	13,340	903	41.49

Natura.	DENOMINAZIONE delle monete.	PESO legale.	TITOLO legale.	VALORE.
	SASSONIA (seguita).	gr.		fr. c
Oro.	Augosto, o 5 tallari. . . .	6,670	903	20.74,50
	Mezzo Augosto	3,335	903	10.37,25
Arg.	Risdallero di specie, o scudo convenzionale dopo il 1763 .	28,064	833	5.19,50
	Mezzo, o fiorino di convenzione.	14,032	833	2.59,75
	Tallero di 24 buoni grossi (moneta immaginaria). . . .	» »	»	3.89,63
	Un grosso, o 32°, risdallero.	1,982	368	0.16,21
	SICILIA.			
Oro.	Oncia, del 1748.	4,399	906	13.73
Arg.	Scudo, o pezza di 12 tarì. .	27,533	833 $\frac{2}{3}$	5.10
	SVEZIA.			
Oro.	Ducato	3,482	976	11.70
	Mezzo	1,741	976	5.85
	Quarto	0,8705	976	2.92.50
Arg.	Risdallero di specie di 48 scellini, del 1720 al 1802. .	29,508	873	5.75,73
	2 terzi di risdallero, o doppia plotta di 32 scellini. .	19,672	878	3.83,82
	Un terzo o 16 scellini . . .	9,836	878	1.91,91
	VENEZIA.			
Oro.	Zecchino	3,484	1000	12.00
	Mezzo	1,742	1000	6.00
	Osella	13,666	1000	47.07
	Du cato	2,175	1000	7.49
	Doppia	6,764	917	21.36
	Ducato effettivo di 8 lire piccole.	22,777	826	4.18
Arg.	Scudo alla croce	31,788	948	6.70
	Giustino o Ducatone	27,954	948	5.91
	Tallaro	28,990	826	5.32
	Osella	9,843	948	2.07
	Ducato corrente di 6 $\frac{1}{5}$ di lire piccole	» »	»	3.23,95
	Lira di 20 soldi	» »	»	0.52,25

Natura.	DENOMINAZIONE delle monete.	PESO legale.	TITOLO legale.	VALORE.
	GIAPPONE.	gr.		fr. c.
	(*Per approssimazione in mancanza di notizia precisa pel peso e titolo legale delle monete.*)			
Oro.	Kobang vecchio di 100 mas. .	» »	»	51.24
	Mezzo di 50 mas.	» »	»	25.62
	Kobang nuovo di 100 mas. .	» »	»	32.69
	Mezzo di 50 mas.	» »	»	16.34,50
Arg.	Tigo-gin, o pezza di 40 mas.	» »	»	14.40
	Mezzo di 20 mas.	» »	»	7.20
	Un quarto di 10 mas . . .	» »	»	3.60
	Un ottavo di 5 mas . . .	» »	»	1.80
	MOGOL (*Per approssimazione*)			
Oro.	Roupie del mogol.	» »	»	38.72
	Mezzo	» »	»	19.36
	Un quarto.	» »	»	9.68
	Pagode	» »	»	9.46
	—— alla stella	» »	»	9.35
	Ducato della Compagnia Olandese	» »	»	11.62
	Mezzo.	» »	»	5.81
Arg.	Roupie del mogal.	» »	»	2.42
	—— di Madras	» »	»	2.40
	—— d' Arcate	» »	»	2.36
	—— di Pondichery. . . .	» »	»	2.42
	Doppio fanon delle Indie . .	» »	»	0.63
	Fanon	» »	»	0.31,50
	Pezza della compagnia olandese.	» »	»	2.40
	PERSIA (*Per approssimazione.*)			
Oro.	Roupie	» »	»	36.75
	Mezzo	» »	»	18.37,50
Arg.	Doppia Rupie di 5 abassis. .	» »	»	4.90
	Rupie di 2 $\frac{1}{2}$ abbassis. . .	» »	»	2.45
	Abassis	» »	»	0.97
	Mamoudi	» »	»	0.48,50
	Lariu.	» »	»	1.03

Natura.	DENOMINAZIONE delle monete.	PESO legale.	TITOLO legale.	VALORE.
	TURCHIA.	gr.		fr. c
Oro.	Zecchino Zermanhboud d'Abdoul-Hamid 1774 . . .	2,642	958	8.72
	Nisfie, o $\frac{1}{2}$ zermanhboud *idem.*	1,321	958	4.36
	Rubbié, o $\frac{1}{4}$ di zecchino fondautli.	0,881	802	2.43,3
	Zecchino zermanhboud di Selim III.	2,642	802	7.30
	Mezzo	1,321	802	3.65
	Un quarto.	0,661	802	1.82,50
Arg	L'allimichelec di 60 paras, dopo 1771.	28,822	550	3.52
	Yaremlec di 20 paras, o 60 aspres 1757	» »	»	0.99
	Roubb di 10 paras, o 30 aspres, 1757.	» »	»	0.49.50
	Para di 3 aspres, 1773 . .	» »	»	0.04
	Aspre, di cui 120 per la piastra del 1773	» »	»	0.01,33
	Piastre di 40 paras, o 120 aspres del 1780	18,015	500	2.0
	Pezza di 5 piastre di Malemond, del 1811.	» »	»	4.13,67
	STATI UNITI DI AMERICA.			
Oro.	Doppia aquila di 10 dollari .	17,480	217	55.21
	Aquila di 5 dollari	8,740	217	27.60,50
	Mezza Aquila, o 2 $\frac{1}{2}$ dollari.	4,370	217	13.80,25
Arg.	Dollaro	27,00	903	5.42
	Mezzo	13,500	903	2.71
	Un quarto	6,740	903	1.35,50

FINE.

SBN 60[illegible]3

Digitized by Google

Digitized by Google

BIBLIOTECA